Einleitung

in die

Differential- und Integralrechnung.

Zweiter Theil.

Einleitung

in die

Differential- und Integralrechnung

von

Karl Snell,
ordentlichem öffentlichem Professor der Mathematik und Physik
an der Universität Jena.

Zweiter Theil.

Von den höheren Differentialquotienten.

Mit vier lithographirten Tafeln.

Leipzig:
F. A. Brockhaus.
1851.

Vorrede.

Nach einer längeren Verzögerung, deren Gründe, da sie persönlicher Natur sind, mit Stillschweigen übergangen werden mögen, übergebe ich hiermit den Freunden der höheren Analysis den zweiten Theil meiner Einleitung in die Differential- und Integralrechnung. Die in demselben gegebene Erörterung des Wesens und der Bedeutung der höheren Differentialquotienten ist, so viel mir bekannt, die erste ausführliche und erschöpfende, welche diesem wichtigen Zweige der Infinitesimalrechnung seit der Entdeckung dieser Wissenschaft zu Theil geworden ist. Der Leser findet hier dasjenige ausgeführt, was als der Zweck und der Inhalt der Lehre von den höheren Differentialquotienten an einigen Stellen des ersten Theiles im Vorbeigehen angedeutet ist. Ueber das, was an der gangbaren Auffassung dieser Lehre vermißt wird, und was eine erschöpfende Darstellung derselben zu leisten hat, habe ich mich in den ersten Paragraphen dieses Theiles ausgesprochen, und finde daher nicht nöthig, den Standpunkt, von welchem aus ich meinen Gegenstand betrachtet habe, und das Verhältniß dieser Darstellung zu anderen desselben Gegenstandes hier näher zu bezeichnen. Nur so viel will ich noch bemerken, daß die hier gegebene Darstellung der Lehre von den höheren Differentialquotienten eine ganz einfache Folge der in dem ersten Theile enthaltenen Lehre vom ersten Differentialquotienten

ist. Sowie wir bei dieser letzteren Lehre die gleichmäßig Wachsenden, als die einzigen Größen, welche eine bestimmte und klare Vorstellung von der Stärke des Wachsens geben können, an die Spitze gestellt haben, und den Sinn des momentanen Werthes von $\frac{dy}{dx}$ dadurch erläutert haben, daß wir ihn als mit einem constanten Werthe von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ zweier gleichmäßig Wachsenden zusammenfallend nachgewiesen haben, so haben wir auch bei der Veränderung der Stärke des Wachsens oder bei der Beschleunigung des Wachsens die gleichförmig beschleunigt wachsenden Größen, als die Einzigen, mit denen sich die Vorstellung einer bestimmten Veränderung der Stärke des Wachsens verbinden läßt, an die Spitze gestellt, und die Erklärung der Bedeutung des momentanen Werthes von $\frac{d^2y}{dx^2}$ auf einen constanten Werth von $\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}$ zurückgeführt. Ebenso ist die Bedeutung von $\frac{d^3y}{dx^3}$ auf einen constanten Werth von $\frac{\Delta^3 y}{(\Delta x)^3}$ bezogen, und desgleichen mit den folgenden Differentialquotienten. Hiermit wird alle Vorstellung von der Natur und Art des Wachsens darauf zurückgebracht, daß mit gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen gleiche Zunahmen der abhängig Veränderlichen in irgend einem Grade der successiven Differenzenbildung verbunden sind, sei es nun, daß mit gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen entweder unmittelbar gleiche Zunahmen der abhängig Veränderlichen verbunden sind, (gleichmäßig Wachsende schlechthin oder im ersten Grade) oder gleiche Zunahmen der Zunahmen, d. h. gleiche Unterschiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen, oder gleiche Zunahmen der Unterschiede der Zunahmen u. s. w. Wir haben daher gleichmäßig Wachsende im ersten, zweiten, dritten u. s. w. Grade, und überhaupt eine Stärke des Wachsens im

ersten, zweiten und dritten Grade unterschieden. Jede solche in irgend einem Grade gleichmäßig Wachsende gibt uns in einem leicht und vollkommen bestimmt angebbaren Ausdrucke eine feste und unveränderliche Regel des Wachsens der Veränderlichen, und ein beliebiger Werth eines höheren Differentialquotienten hat in Bezug auf das Wachsen der Veränderlichen eben den einfachen Sinn, daß er mit gleichmäßig Wachsenden desselben Grades von constanter Stärke des Wachsens zusammenfällt. Wir haben, um die Vorstellung von dem Werthe und der Bedeutung der höheren Differentialquotienten zur Anschaulichkeit und vollkommensten Evidenz zu bringen, nicht versäumt, die geometrische Construction der höheren Differentialquotienten für verschiedene veränderliche Raumgrößen hinzuzufügen. Jedermann hält den constanten Differenzquotienten der Coordinaten der Tangente eines bestimmten Curvenpunktes für die geometrische Construction des dem berührten Curvenpunkte zugehörigen momentanen Werthes von $\frac{dy}{dx}$, in sofern x und y die Parallelcoordinaten der Curve vorstellen. Sowie nun in dem constanten Werthe von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ der Coordinaten der Tangente der momentane Werth von $\frac{dy}{dx}$ der Coordinaten der Curve zur Ausführung und wirklichen Darstellung kommt, so haben wir gezeigt, wie in den constanten Werthen von $\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}$, $\frac{\Delta^3 y}{(\Delta x)^3}$ u. s. w. der Coordinaten gewisser Linien die momentanen Werthe von $\frac{d^2 y}{dx^2}$, $\frac{d^3 y}{dx^3}$ u. s. w. der Coordinaten beliebiger Curven zur Ausführung kommen, und man wird dies die geometrische Construction der höheren Differentialquotienten in Bezug auf Parallelcoordinaten zu nennen haben. Wir haben uns bei der geometrischen Construction der höheren Differentialquotienten nicht auf Ordinaten und insbesondere auf Parallelordi=

naten beschränkt. Sobald der Begriff der höheren Differentialquotienten allgemein, d. h. arithmetisch, genau festgestellt ist, hat es ja gar keine Schwierigkeit, ihn auf alle veränderliche Raumgrößen zu übertragen. Ich finde, daß in mehreren neueren Werken über Differentialrechnung ein Anlauf genommen ist zur anschaulichen Erläuterung der Bedeutung der höheren Differentialquotienten und zur geometrischen Construction derselben, sehe aber, daß man in dieser Aufgabe stecken geblieben und zu keinem befriedigenden Ziele gekommen ist, aus dem einfachen Grunde, weil man die Begriffe der im zweiten, dritten u. s. w. Grade gleichmäßig wachsenden Größen nicht an die Spitze gestellt hat.

Denkt man sich die in einem Verflußpunkte einer abhängig Veränderlichen vorhandene momentane Stärke des Wachsens eines höheren Grades als zur Ausführung gekommen, und stellt man diejenige Function der willkürlich Veränderlichen, in welcher diese Ausführung enthalten ist, dar, so hat man in derselben die Taylor'sche Reihe, oder, von dieser etwas speciellen Form einer Reihe abgesehen, überhaupt eine Potenzenreihe der willkürlich Veränderlichen, deren Coefficienten bestimmt sind durch die verschiedengradige Stärke des Wachsens desjenigen Verflußpunktes der Veränderlichen, dessen Stärke des Wachsens eines beliebigen höheren Grades als zur Ausführung gekommen gedacht werden soll. Die Taylor'sche und andere verwandte Reihen sind nicht etwas Besonderes zur Lehre von den höheren Differentialquotienten neu Hinzukommendes, sondern sie stellen allgemein die zur Ausführung gekommene Stärke des Wachsens irgend eines höheren Grades vor. Daß die Taylor'sche Reihe erst beinahe vierzig Jahre nach der Bekanntmachung der Differential- und Integralrechnung entdeckt worden ist, ja daß es dazu überhaupt noch einer Entdeckung bedurfte, zeigt, daß auch die Entdecker und ersten Bearbeiter der Differentialrechnung es versäumt hatten, sich die Bedeutung der höheren Differentialquotienten in dem Sinne klar

zu machen, daß sie fragten, wie würden die veränderlichen Größen wachsen, wenn die durch einen höheren Differentialquotienten ausgedrückte Stärke des Wachsens eines beliebigen Grades zur Ausführung käme. In unserer Darstellung gehören die Taylor'sche und verwandte Potenzenreihen als nothwendiger Bestandtheil und als Schlußstein zu der Lehre von den höheren Differentialquotienten, und von der in der Regel de tri schon gebrauchten Vorstellung eines schlechthin gleichmäßigen Wachsens bis zur Taylor'schen Reihe ist die ganze Differentialrechnung ein aus Einem Keime sich entfaltendes Gewächs, oder ein geschlossenes und in Einem Plane erfaßtes Gebäude, in welchem nichts willkürlich von außen angesetzt ist, sondern Alles mit Nothwendigkeit an bestimmter Stelle hervortritt und sich einfügt, weil das Ganze nur die methodische Entfaltung des nach seiner ganzen Tiefe erschöpften Begriffes eines gemeinschaftlichen Wachsens veränderlicher von einander abhängiger Größen ist. Wie einfach und natürlich sich dadurch die Theorie der Reihen gestaltet, welche neue Gesichtspunkte in der Betrachtung derselben, und selbst welche neue Reihen sich dabei ergeben haben, möge der Leser an dem betreffenden Orte selbst nachsehen. Nur will ich bemerken, daß mir die im Capitel 10 aufgestellte Reihe (1), welche allgemein die Entwickelung einer Function $f(x)$ enthält, und bei welcher die Coefficienten mit der Anzahl der Glieder der Reihe gesetzmäßig sich ändern, in sofern von Wichtigkeit erscheint, als man aus derselben sieht, daß eine Potenzenreihe der willkürlich Veränderlichen convergiren und den Werth einer Function mit unbegrenzter Annäherung darstellen kann, wenngleich bis ins Endlose hin die folgenden Glieder der Reihe immer größer werden, und daß man Functionen von x, welche man bisher nicht in Potenzenreihen des ganzen Zahlenwerthes x mit angebbaren Coefficienten dargestellt hat, wie z. B. $\lg x$, und dergl. m. sehr wol durch diese Reihe als Potenzenreihe von x darstellen und mit beliebiger Annäherung berechnen kann.

Zum Schluß noch ein Wort der Rechtfertigung gegen einige Beurtheilungen, welche der erste Theil dieses Werkes erfahren hat. Ich habe mir nie beikommen lassen zu denken, daß meine Erklärung des Sinnes und der Bedeutung des ersten Differentialquotienten etwas Neues oder irgend einem Mathematiker Unbekanntes wäre, weil ich sah, daß alle einsichtsvollen Mathematiker, sobald sie den Sinn des Differentialquotienten bestimmter veränderlicher Größen erklärten, für den einzelnen Fall ganz dieselbe Erklärung gegeben, welche ich im Allgemeinen gegeben hatte. Nun ist von Mathematikern, welche selbst Schriftsteller im Gebiete der Differentialrechnung sind, meine auf gleichmäßig Wachsende zurückgeführte Erklärung der Bedeutung des ersten Differentialquotienten als eine verkehrte und thörichte Neuerung angegriffen worden. Es konnte kaum etwas Anderes mir eine so große Zufriedenheit mit meiner Arbeit einflößen als dieser Angriff gethan hat, weil ich einsah, daß meine ausführlichen allgemeinen Erörterungen und Erklärungen viel nöthiger und heilsamer sind als ich selbst gedacht hatte, da selbst Leute, die sich für Fach- und Sachkenner ausgeben, an der Differentialrechnung nichts weiter als einen begrifflosen Mechanismus haben, und ihnen die einfachsten trivialsten Grundbegriffe als etwas Neues erscheinen. Die Widerlegung dieses Angriffes wird mir leicht. Die Herren brauchen sich nämlich nur die Mühe zu nehmen, irgend ein Buch eines einsichtsvollen Mathematikers, in welchem der Sinn des Differentialquotienten bestimmter Größen erläutert wird, nachzuschlagen, so werden sie finden, daß Jeder, der sich überhaupt nur etwas denkt bei einem Differentialquotienten, sich nichts Anderes dabei denkt als was ich angegeben habe. In Poisson's Mechanik z. B. ist die Bedeutung der Differentialquotienten $\frac{ds}{dt}$ (Raum und Zeit) und $\frac{dc}{dt}$ (Geschwindigkeit und Zeit) erklärt. Daselbst ist nicht von unendlich kleinen Zeiten und zugehörigen unend-

lich kleinen Räumen oder Geschwindigkeiten die Rede, sondern es heißt, $\frac{ds}{dt}$ bedeute die „Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung, die statthaben würde, wenn die Kraft, die auf den Körper wirkt, in diesem Augenblicke aufhörte zu wirken.“ Also werden doch Raum und Zeit als gleichmäßig wachsend vorausgesetzt, um überhaupt eine bestimmte Vorstellung von Geschwindigkeit und von der durch $\frac{ds}{dt}$ ausgedrückten momentanen Geschwindigkeit zu haben. Ebenso heißt es gleich darauf in Bezug auf den Sinn des Differentialquotienten $\frac{dc}{dt}$: „Man bemerke, daß $\frac{dc}{dt}$ die Geschwindigkeit ist, welche eine beständige Kraft in der Einheit der Zeit hervorbringen würde.“ Also werden auch hier Geschwindigkeit und Zeit wieder als gleichmäßig wachsend vorausgesetzt, und die Kraft während einer Zeit $=1$ als unverändert angenommen, um eine bestimmte Vorstellung von der Stärke des Wachsens von Geschwindigkeit und Zeit, und von dem Werthe des Differentialquotienten $\frac{dc}{dt}$ zu haben. Ist dies etwas Anderes als was wir allgemein von einem Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ im §. 36 sagen: Der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ gibt die Anzahl der Einheiten an, um welche die abhängig Veränderliche y wachsen würde bei einer Zunahme der willkürlich Veränderlichen $=1$, wenn die vorhandene Stärke des Wachsens unverändert bliebe. Es muß auffallen in einem Buche, wie Poisson's Mechanik, in welchem die ganze Differential- und Integralrechnung als bekannt vorausgesetzt ist, den Sinn des Differentialquotienten solcher bestimmten Größen, der doch kein anderer ist als der eines jeden Differentialquotienten, erläutert zu finden, und daß zwar die ganze Rechnung, aber

nicht der einfachste Grundbegriff derselben als bekannt vorausgesetzt wird. Es scheint fast, daß Poisson den Rechnungsmechanismus der Differential- und Integralrechnung seinen Lesern zutraue, aber nicht die geringste Idee von dem Werthe und der Bedeutung eines Differentialquotienten, und daran mag er nun wol, nach dem zu schließen, was ich bei Gelegenheit einiger Recensionen erfahren habe, so Unrecht nicht haben. Bei so bewandten Umständen in Betreff der Einsicht in das Wesen und die Bedeutung des ersten Differentialquotienten kann man leicht denken, wie es hier und da mit der Einsicht in die Bedeutung der höheren Differentialquotienten beschaffen sein mag, und ich darf um so mehr glauben, mit meiner ausführlichen Darlegung dieser Lehre keine überflüssige Arbeit unternommen zu haben.

Das Ziel, welches ich mir bei Abfassung dieses Lehrbuches ursprünglich gesteckt hatte, ist zwar mit diesem zweiten Bande erreicht. Da indessen die Differentiation der Functionen mit mehreren Veränderlichen und die Lehre von den partiellen Differentialquotienten, sowie einige Punkte der Integralrechnung und die Lehre von den bestimmten Integralen noch als Gegenstände von allgemeinerer Bedeutung angesehen werden können, die wol eine ausführlichere Erläuterung bedürfen, als ihnen gewöhnlich zu Theil wird, und da ich mir vorgenommen habe, in dieser Einleitung alle allgemeineren Gegenstände so vollständig abzuhandeln, daß Jeder, der dieselben gefaßt hat, sich das einzelne Material der Wissenschaft aus jedem ausführlichen Lehrbuche mit Leichtigkeit aneignen kann, so gedenke ich noch einen dritten, die eben erwähnten Gegenstände umfassenden Band folgen zu lassen, jedoch freilich, da ich zunächst andere literarische Arbeiten in Angriff genommen habe, erst nach einigen Jahren.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichniß.

Achtes Capitel.

Vom zweiten Differentialquotienten.

Neuntes Capitel.

Vom dritten und den folgenden Differentialquotienten.

Zehntes Capitel.

Näherungswerthe der Functionen durch gleichmäßig Wachsende in höheren Graden, oder die Taylor'sche, die Maclaurin'sche und andere Reihen.

Elftes Capitel.

Von den Uebergangspunkten der Stärke des Wachsens in allen Graden.

Zwölftes Capitel.

Von der Krümmungsstärke der krummen Linien.

Dreizehntes Capitel.

Von der geradlinigten Bewegung in einem widerstehenden Medium.

Vierzehntes Capitel.

Frühere Rechnungsmethoden, welche als Vorstufen der Differential- und Integralrechnung gelten können.

Achtes Capitel.

Vom zweiten Differentialquotienten.

§. 101.

Gegenstand der Lehre von den höheren Differentialquotienten.

In der vorausgehenden Lehre vom ersten Differentialquotient, welchen wir bisher, weil eine Unterscheidung desselben von andern Differentialquotienten noch nicht nöthig war, gewöhnlich schlechtweg den Differentialquotient genannt haben, ist gezeigt worden, daß jede zwei von einander abhängige veränderliche Größen, deren Gesetz der Abhängigkeit durch irgend eine beliebige Function, welche nicht von der Form $ax + b$ ist, ausgedrückt erscheint, eine stetig veränderliche Stärke ihres Wachsens haben, und daß die jedesmalige Größe dieser momentanen Stärke ihres Wachsens allgemein für jeden beliebigen Zahlenwerth der willkürlich Veränderlichen x durch den ersten Differentialquotient dieser Function von x gegeben ist. In dieser Auseinandersetzung der Bildungsweise und Bedeutung des ersten Differentialquotienten haben wir uns darauf beschränkt nachzuweisen, wie der für einen beliebigen einzelnen Verflußpunkt der willkürlich Veränderlichen stattfindende Größenwerth der veränderlichen Stärke des Wachsens berechnet werden kann, aber die Veränderungen, welchen diese Stärke des Wachsens selbst im Fortschritt der wachsenden Größe unterworfen ist, haben wir außer Acht gelassen, wenigstens in sofern, als wir nicht unternommen haben, ein Gesetz dieser Verände-

rung aufzustellen, und sie ihrem Größenwerthe nach zu bestimmen. Da es aber bei der Bestimmung der Eigenthümlichkeiten und der Natur des Wachsens der von einander abhängigen veränderlichen Größen, in sofern sie eine erschöpfende soll genannt werden können, offenbar nicht allein darauf ankommt, wie groß in einem einzelnen Verflußpunkt die Stärke des Wachsens ist, sondern auch darauf, um wie viel die Stärke des Wachsens bei dem Uebergang von einem Verflußpunkt der willkürlich Veränderlichen zu einem andern sich verändert hat, oder wie überhaupt das Gesetz der Veränderung der Stärke des Wachsens verläuft, so schließt sich an die schon abgehandelte Frage, wie die Größe der momentanen Stärke des Wachsens gefunden wird, die andere, wie man sich von der Größe der Veränderung der Stärke des Wachsens eine bestimmte Vorstellung bilden und dieselbe ihrem Größenwerthe nach berechnen kann.

Hierbei kann als einfachster Fall der Veränderung der Stärke des Wachsens der eintreten, in welchem die Stärke des Wachsens immer um gleichviel zu- oder abnimmt bei gleichem Zunehmen der willkürlich Veränderlichen, oder in welchem die willkürlich Veränderliche und die Stärke des Wachsens der beiden Veränderlichen sich als gleichmäßig wachsende Größen darstellen. In diesem Falle einer gleichbleibenden Veränderung in der Stärke des Wachsens wird es sich nur darum handeln, das unveränderliche Maß dieser Veränderung in bestimmte Begriffe zu fassen, und dasselbe auf angemessene Weise in der analytischen Zeichensprache auszudrücken, in ähnlicher Weise, wie früher bei Betrachtung der Stärke des Wachsens die gleichmäßig wachsenden Größen und ihr constanter Differenzquotient als unveränderliches Maß der Stärke des Wachsens aufgestellt wurden. Tritt aber der zweite denkbare Fall ein, daß mit allen auch beliebig kleinen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen immer ungleiche Zunahmen der Stärke des Wachsens der beiden veränderlichen Größen verbunden sind, so ist nicht blos die Stärke des Wachsens, sondern auch die Veränderung der

Stärke des Wachsens eine stetig veränderliche Größe, und ist in jeden zwei auch noch so nahe liegenden Punkten der willkürlich Veränderlichen eine verschiedene. Es wird alsdann die Frage entstehen, wie man diese momentane Veränderung der Stärke des Wachsens, die nicht zur Ausführung kommt, sondern nur als Bestreben, eine bestimmte Veränderung der Stärke des Wachsens hervorzubringen, vorhanden ist, ihrem Größenwerthe nach berechnen und auf ein gleichbleibendes Maß der Veränderung der Stärke des Wachsens zurückführen kann.

Da ferner in dem Falle, als die Veränderung der Stärke des Wachsens nicht constant, sondern stetig veränderlich ist, an die eben beregte Frage, wie groß in einem einzelnen Verflußpunkt der willkürlich Veränderlichen die Veränderung der Stärke des Wachsens ist, die andere sich anreihen läßt, nach welchem Gesetz diese Veränderung der Stärke des Wachsens sich selbst verändert, und auch hier wieder das allgemeine Maß und der jedesmalige Größenwerth dieser Veränderung zu bestimmen sein wird, und da endlich diese Frage immer wiederkehrt, sobald das Maß einer weiter hinausliegenden Veränderung sich nicht constant zeigt, so sieht man leicht, daß durch die vorausgehende Lehre vom ersten Differentialquotient die Analyse des Begriffs eines von einander abhängigen gemeinschaftlich fortschreitenden Wachsens der Größen noch lange nicht erschöpft ist, und daß wir, um die Natur des ungleichmäßigen Wachsens auf allen Stufen der in ihm stattfindenden Veränderungen zu verfolgen, und einen klaren Blick in die verborgene Werkstätte des Wachsens der Größen zu bekommen, noch ein ziemlich weitläufiges Begriffsgebiet zu durchmessen haben werden. Die Aufhellung dieses eben angedeuteten Begriffs der stufenweis übereinander liegenden Veränderungen der Stärke des Wachsens und die Nachweisung des Gebrauchs derselben zur Auffindung der Eigenschaften ungleichmäßig wachsender Größen bildet den wesentlichen Inhalt der Lehre von den höheren Differential-

quotienten. Ohne die Erläuterung und Feststellung dieser Begriffe ist es nicht möglich, den höheren Differentialquotienten einen bestimmten, in Worten völlig aussprechbaren Sinn, und in der Anwendung auf concrete continuirlich wachsende Größen, wie Raum, Zeit und Bewegung, eine anschauliche handgreifliche Bedeutung beizulegen, und läuft man Gefahr, sich in leere Formeln zu verlieren, deren operative Entstehung man zwar kennt, deren Sinn und Bedeutung aber für das Wachsen der ursprünglichen Function, deren successive Differentialquotienten man genommen hat, damit noch nicht gegeben ist.

§. 102.

Bezeichnungsweise der höheren Differentialquotienten.

Ehe wir zur näheren Entwickelung der das Gebiet der höheren Differentialquotienten beherrschenden Begriffe schreiten, wird es zur Bildung einer bestimmteren Ansicht von der Natur des vorliegenden Problems nicht undienlich sein, die in den Lehrbüchern der Differentialrechnung gangbare ganz kurzgefaßte Darstellung der Lehre von den höheren Differentialquotienten hier vorläufig mitzutheilen, weil wir auf die Weise durch Darlegung dessen, was an der gangbaren Auffassung vermißt wird, am leichtesten das Bedürfniß einer ausführlicheren Grundlegung und das Interesse für dieselbe erwecken zu können glauben. Diese gangbare Darstellung der Lehre von den höheren Differentialquotienten läuft im Wesentlichen auf Folgendes hinaus. Ist der Differentialquotient einer Function einer Veränderlichen selbst wieder eine Function dieser Veränderlichen, was bei allen Functionen von x mit Ausnahme des einzigen $ax + b$ der Fall ist, so kann man natürlich diesen Differentialquotient wie jede Function von x von Neuem der Operation des Differentiirens unterwerfen, und erhält dadurch den Differentialquotient von dem Differentialquotient einer Function, welchen man den zweiten Differentialquotient dieser Function nennt. Ist auch dieser zweite Dif-

ferentialquotient nicht constant, sondern eine Function der Veränderlichen, so kann man ihn ebenfalls wieder differentiiren, und erhält so den Differentialquotient von dem zweiten Differentialquotient, welchen man den dritten Differentialquotient nennt u. s. w. Die Möglichkeit der Bildung dieser successiven Differentialquotienten versteht sich so sehr von selbst, daß wir uns im ersten Theile auch ohne Weiteres, wo es nöthig war, derselben bedient haben. In so fern man auch die Begriffsbestimmung der höheren Differentialquotienten nur aus dieser für sich ganz klaren operativen Entstehung derselben entnimmt, ist weiter nichts nöthig, als nur noch die Erklärung der üblichen analytischen Bezeichnungsweise derselben hinzuzufügen, um das Wesentliche der gangbaren Lehre von den höheren Differentialquotienten zu haben. Diese Beziehungsweise wird nun, da die Operation zur Erzeugung der höheren Differentialquotienten eine bloße Wiederholung des einfachen Differentiirens ist, zunächst am natürlichsten so gebildet werden, daß sie auch auf eine bloße Wiederholung der für den ersten Differentialquotient üblichen Bezeichnung hinausläuft. Nun bezeichnet man bekanntlich den Differentialquotient einer Function von x dadurch, daß man vor die Function den Buchstaben d setzt, und dx als Nenner darunterschreibt, wie man z. B. den Differentialquotient der Function $ax^3 + x^{\frac{1}{2}}$ durch $\frac{d\left(ax^3 + x^{\frac{1}{2}}\right)}{dx}$ bezeichnet, oder, da $3ax^2 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ der Differentialquotient der Function $ax^3 + x^{\frac{1}{2}}$ ist, diesen Zusammenhang der Operationen durch die analytische Differentialgleichung $\frac{d\left(ax^3 + x^{\frac{1}{2}}\right)}{dx} = 3ax^2 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ ausdrückt. Betrachtet man nun die linke Seite dieser Gleichung als Zeichen einer Function von x, so wird man den

Differentialquotient dieser Function wie jeden andern dadurch andeuten können, daß man den Buchstaben d vor dieselbe setzt, und durch dx dividirt, also durch die Bezeichnung $\frac{d\left[\frac{d\left(ax^3+x^{\frac{1}{2}}\right)}{dx}\right]}{dx}$. Und da der Differentialquotient der Function $\frac{d\left(ax^3+x^{\frac{1}{2}}\right)}{dx}$, d. h. der Function $3ax^2+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ gleich ist $6ax-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$, so erhält man die analytische Differentialgleichung

$$\frac{d\left[\frac{d\left(ax^3+x^{\frac{1}{2}}\right)}{dx}\right]}{dx}=6ax-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}},$$

welche, weil sie den Zusammenhang einer ursprünglichen Function und ihres zweiten Differentialquotienten darstellt, eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung heißt. Diese Bezeichnungsweise des zweiten Differentialquotienten, welche soeben bei gegebenen Functionen von x gebraucht worden ist, in welchem Falle die entstehende Differentialgleichung nur dazu dient, eine Regel des Differentiirens auszusprechen, läßt sich natürlich auch gebrauchen, um anzudeuten, daß der zweite Differentialquotient einer unbekannten oder auch einer unbestimmten durch y vorgestellten Function von x gedacht werden soll. Denn da in diesem Fall der Ausdruck $\frac{dy}{dx}$ nur Zeichen einer Function von x ist, und folglich der Ausdruck $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$ Zeichen des Differentialquotienten dieser Function $\frac{dy}{dx}$, so wird der Ausdruck $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$

den zweiten Differentialquotient der durch y vorgestellten Function bedeuten. Wäre z. B. der Differentialquotient einer unbekannten durch y vorgestellten Function von x direct gegeben, und gleich $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$, was durch die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$ auszudrücken wäre, so würde man, da der Differentialquotient der Function $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$ gleich ist $\frac{2x - x^{-2}}{2\left(x^2 + x^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}}$, die aus der vorhergehenden Gleichung zu bildende Differentialgleichung der zweiten Ordnung schreiben $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{2x - x^{-2}}{2\left(x^2 + x^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}}$.

Man sieht leicht, daß diese Bezeichnungsweise der höheren Differentialquotienten ihre Uebelstände und Mängel hat. Denn wollte man auf die Weise fortfahren, und den dritten Differentialquotient einer durch y vorgestellten Function von x durch den Ausdruck $\frac{d\left[\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}\right]}{dx}$ andeuten u. s. w., so würde man eine durch ihre gespreizte Form sehr schwerfällige und bei hohen Differentialquotienten fast unausführbare Bezeichnung erhalten, abgesehen von dem Mangel, daß durch dieselbe ein seiner Ordnungszahl nach unbestimmt gelassener Differentialquotient, wie etwa der nte Differentialquotient, direct gar nicht ausgedrückt werden könnte. Man hat daher für gewöhnlich eine andere Bezeichnungsweise der successiven Differentialquotienten in Gebrauch genommen, welche von den berügten Mängeln und Uebelständen frei ist. Obgleich dieselbe, wie wir

bald sehen werden, noch einen tiefer liegenden Grund ihrer Entstehung hat, als den einer Abkürzung oder größeren Bequemlichkeit der Schreibart, und auch mit einem ganz andern Sinn der höheren Differentialquotienten als demjenigen, auf welchen die bloße Wiederholung des Differentiirens unmittelbar führt, aufs genaueste zusammenhängt, so hat man sich doch schon längst gewöhnt, die Erklärung dieser zweiten Bezeichnungsart ganz losgerissen von dem ursprünglichen Weg ihrer Entstehung zu geben, und sie nur als eine andere willkürliche Bezeichnungsart aufzuführen. Auf diese gangbare Erklärung kommt es uns aber hier zunächst allein an. Dieselbe wird abgeleitet aus der Art, wie man Differentialgleichungen mit isolirten Differentialen schreibt (siehe §. 37). Diese Schreibart besteht bekanntlich darin, daß man vor eine Function von x oder vor das Zeichen, welches eine solche Function vorstellen soll, den Buchstaben d setzt, und diesen Ausdruck gleich setzt dem Differentialquotienten der Function von x multiplicirt mit dx, wie wenn man für die Function ax^3 die Differentialgleichung $dax^3 = 3ax^2dx$ bildet, oder aus der Gleichung $y = ax^3$ die Differentialgleichung $dy = 3ax^2dx$ herleitet. In einer solchen Gleichung mit isolirten Differentialen hat man, um ihr einen aussprechbaren bestimmten Sinn unterzulegen, nach §. 37 sich unter dx einen beliebigen endlichen Zahlenwerth, und unter dy oder, was dasselbe ist, unter $3ax^2dx$ diejenige Zunahme der Function ax^3 zu denken, welche mit der Zunahme dx verbunden sein würde, wenn die beiden Veränderlichen x und ax^3 diejenige Stärke des Wachsens beibehielten, welche sie bei dem Zahlenwerth von x haben, von welchem aus man sich die Zunahme dx gesetzt denkt. So angesehen hat das Differential dy oder $3ax^2dx$ mit dem Unendlichkleinen gar nichts zu schaffen, sondern es ist ein endlicher Zahlenwerth, welcher verglichen mit dem Zahlenwerth dx uns die Vorstellung einer bestimmten Stärke des Wachsens gibt. Insofern man nun für alle veränderlichen Werthe des x dem

dx immer einen und denselben Zahlenwerth beilegt, was offenbar, weil der Zahlenwerth dx beliebig, gestattet ist, so kann man das Differential $3ax^2dx$ betrachten als eine endliche Function von x, welche mit einem constanten Factor dx multiplicirt ist, und ebenso wird dy nur Zeichen einer solchen Function sein. Unter diesen Umständen kann auf die Gleichung $dy = 3ax^2dx$ die oben angeführte Regel des Differentiirens mit isolirten Differentialen ohne Weiteres angewandt werden, und man erhält, da für ein als constante Zahl behandeltes dx der Differentialquotient der Function $3ax^2dx$ gleich $6axdx$ ist, die Differentialgleichung $ddy = 6axdx.dx$. Legt man auch bei dieser neuen Differentiation dem dx denselben Zahlenwerth bei, den es vorher in der Function $3ax^2dx$ für alle veränderlichen Werthe des x haben sollte, so kann man die letzte Differentialgleichung auch schreiben $ddy = 6ax(dx)^2$. Man sieht leicht, daß, wenn man auf diese Weise bei constant gesetztem dx das Differential von dem Differential einer Function von x nimmt, dieses zweite Differential nichts Anderes sein wird, als der zweite Differentialquotient der Function multiplicirt mit $(dx)^2$, und daß also das Differential von dem Differential einer Function dividirt durch $(dx)^2$ den zweiten Differentialquotient dieser Function geben wird. Mithin wird, wenn wir unter y irgend eine Function von x vorstellen, der Ausdruck $\frac{ddy}{(dx)^2}$ so gut den zweiten Differentialquotient der Function y bedeuten als der Ausdruck $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$. Wendet man auf die Gleichung $ddy = 6ax.(dx)^2$, in welcher dx einen constanten endlichen Zahlenwerth haben möge, und folglich $(dx)^2$ als constanter Factor zu behandeln ist, von Neuem dieselbe Regel des Differentiirens an, so erhält man, da $6a(dx)^2$ der Differentialquotient von $6ax(dx)^2$ ist, die Gleichung $dddy = 6a(dx)^2.dx$, und in so fern auch bei dieser Dif-

ferentiation dx denselben Zahlenwerth hat wie vorher, die Gleichung $ddd y = 6a.(dx)^3$, und bemerkt sogleich, daß das dritte Differential einer Function von x dividirt durch $(dx)^3$ oder der Ausdruck $\frac{ddd y}{(dx)^3}$ den dritten Differentialquotient der Function y bedeuten wird. Daß diese Bezeichnungsweise sich ebenso auf die folgenden Differentialquotienten ausdehnen läßt, versteht sich von selbst. Sowol um die häufige Wiederholung des Buchstabens d zu vermeiden, als auch um einen der Ordnungszahl nach unbestimmten Differentialquotient ausdrücken zu können, schreibt man statt $\frac{dd y}{(dx)^2}$, $\frac{ddd y}{(dx)^3}$ u. s. w. $\frac{d^2 y}{(dx)^2}$, $\frac{d^3 y}{(dx)^3}$ und drückt allgemein den nten Differentialquotient der Function y durch $\frac{d^n y}{(dx)^n}$ aus, wobei die in der Weise von Exponenten dem Buchstaben d beigefügten Zahlen natürlich nicht das Mißverständniß von Potenzen veranlassen können, weil der Buchstabe d hier kein Zahlzeichen, sondern ein Operationszeichen ist. Auch bei den im Nenner vorkommenden Potenzen von dx läßt man gewöhnlich die Klammern weg. Nun bedeuten freilich die Ausdrücke dx^2 und dx^3, wenn sie sonst vorkommen, so viel als die Differentiale der Functionen x^2 und x^3, und keineswegs Potenzen von dx, aber man sieht leicht, daß in diesem Falle durch Weglassung der Klammern kein Mißverständniß zu besorgen ist, weil durch die Zusammenstellung selbst, in welcher hier die Ausdrücke dx^2, dx^3 erscheinen, einer Verwechselung dieser verschiedenen Bedeutungen vorgebeugt ist.

Es mag hier noch ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht werden, daß die eben gegebene Regel der Bildung der höheren Differentiale und die daraus fließende Beziehungsweise derselben nur dann völlig gerechtfertigt erscheint, wenn man in einer Differentialgleichung, wie z. B. $dy = 3ax^2dx$, die Größen dy und $3ax^2dx$ nicht als unendlich kleine Größen, sondern in der oben angegebenen

Weise als Functionen mit endlichen Zahlenwerthen betrachtet. Denn nur unter dieser Voraussetzung ist es ohne Weiteres gestattet, dasselbe Verfahren der Differentiation, welches man bei der Gleichung $y = ax^3$ anwendet, auch auf die Gleichung $dy = 3ax^2dx$ auszudehnen, und dabei dx als constante Zahl zu behandeln. Denkt man aber unter dx und folglich auch unter dy eine unendlich kleine Größe, so ist dx jedenfalls nicht mehr ein beliebiger Zahlenwerth, und man sieht dann nicht recht ein, ob bei den folgenden Differentiationen dx immer als denselben Zahlenwerth behaltend angesehen werden darf, wie denn auch Manche diese Behauptung als eine unbewiesene oder unbeweisbare verworfen haben. Ebenso wenig leuchtet unmittelbar ein, wie man diejenige Operation, die man mit y, als einer Function von x mit endlichem Zahlenwerth vorgenommen denkt, indem man den Buchstaben d davorsetzt und dy schreibt, ohne Weiteres wieder auf eine unendlich kleine Größe dy anwenden und ddy schreiben dürfe. Bei der hier festgehaltenen Annahme endlicher Zahlenwerthe der isolirten Differentiale ist die Befugniß einer Wiederholung desselben Verfahrens des Differentiirens unzweifelhaft. Wenn übrigens aus der vorhergehenden Darstellung nicht recht ersichtlich ist, ob es sich dabei nur um eine mehr oder weniger willkürliche Bezeichnung handelt, oder ob eine solche Bezeichnung wie $\frac{d^2y}{dx^2}$ eine gewisse nothwendige Beziehung auf die Eigenthümlichkeit des Wachsens der Größen x und y haben, und etwas Wesentliches damit gesagt sein soll, und wenn es daher, wie fast zu vermuthen, dem Leser bei dieser Darstellung etwas hohl und leer zu Muthe geworden ist, so ist das nicht des Verfassers Schuld; denn er hat schon gesagt, daß er zunächst nur die gangbare Erklärung der Bezeichnungsweise der höheren Differentialquotienten geben wolle. Das Bedeutungsvolle der Bezeichnungen $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ u. s. w. und

ihre wesentliche Beziehung auf die durch sie ausgedrückte Veränderung der Stärke des Wachsens der Größen x und y wird uns später von selbst entgegentreten, wenn wir sie aus der Entwickelung des Begriffs einer Veränderung der Stärke des Wachsens als eine sich nothwendig darbietende und inhaltreiche hervorgehen sehen.

Es muß schließlich über die Bezeichnungsweisen der höheren Differentialquotienten noch bemerkt werden, daß man die aufeinanderfolgenden Differentialquotienten einer durch f(x) ausgedrückten unbestimmten Function von x auch durch Striche, welche dem Buchstaben f beigefügt werden, bezeichnet, sodaß man sich unter $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ u. s. w. der Reihe nach den ersten, zweiten und dritten Differentialquotient der Function f(x) zu denken hat. In sofern man bei diesen Strichen nur ihre Anzahl als das Wesentliche ins Auge faßt, und sich statt ihrer die entsprechenden Zahlen denkt, kann man diese Bezeichnungsweise auch verallgemeinern, und einen seiner Ordnungszahl nach unbestimmten Differentialquotient, wie z. B. den nten, durch $f^{n}(x)$ ausdrücken. Der Vorzug dieser Bezeichnung, wenn man das einen Vorzug nennen will, ist der, daß sie gar keiner Erklärung bedarf. Aber diesen Vorzug verdankt sie nur dem Umstand, daß sie als eine rein willkürliche gar keine Beziehung hat auf die Begriffe, um deren Erörterung und Aufhellung es sich eben handelt, wenn man von den höheren Differentialquotienten eine Anwendung und einen Gebrauch machen will. Uebrigens ist der vermeintliche Vortheil, welcher zur Einführung dieser Bezeichnung Veranlassung gegeben hat, schon früher (§. 38) als trügerisch nachgewiesen worden. Diese Bezeichnung gewährt gar keinen Vortheil als den einer etwas größeren typographischen Bequemlichkeit. Sie hat aber gegen die frühere den wesentlichen Nachtheil, daß sie für sich allein nur den Differentialquotient einer unbestimmt ausgedrückten Function f(x) darstellen kann, nicht aber einer bestimmten, und also zur Aufstellung analytischer Differen-

tialgleichungen, d. h. zur Darstellung von Differentiationsregeln in Einer Gleichung gar nicht gebraucht werden kann. Um z. B. auszudrücken, daß der dritte Differentialquotient der Function lx (natürlicher Logarithmus von x) gleich sei $\frac{2}{x^3}$, reicht in der früheren Bezeichnungsweise die einzige Gleichung $\frac{d^3 lx}{dx^3} = \frac{2}{x^3}$ hin, während man bei der letzteren die Unbequemlichkeit hat, diese Differentiationsregel nur durch eine Zusammenstellung von zwei Gleichungen ausdrücken zu können, indem man erst $lx = fx$ und dann $f'''(x) = \frac{2}{x^3}$ setzen muß. Man sieht leicht, daß man, um überhaupt nur die Operation des Differentiirens anzudeuten, allemal genöthigt ist, die bestimmten Functionen, wenn man mit solchen zu thun hat, erst durch unbestimmte Functionsbezeichnungen auszudrücken, weil die Operationsbezeichnung höchst ungeschickter Weise an den Buchstaben, der gerade die Unbestimmtheit der Function fordert, angeklebt ist, und daß man die unter der unbestimmten Functionsbezeichnung vorgestellte bestimmte Function immer im Gedächtniß haben muß, während man sie doch bei der früheren Bezeichnungsweise gleich bequem vor Augen haben könnte. Diese letztere Bezeichnungsweise muß also, da sie weder die frühere in allen Beziehungen ersetzt, noch auch etwas Neues hinzufügt, als durchaus nutzlos und überflüssig angesehen werden, und wir wollen von derselben daher auch keinen Gebrauch machen.

§. 103.

Hieraus fließende Bedeutung der höheren Differentialquotienten.

Die Bedeutung, welche den höheren Differentialquotienten der im vorhergehenden Paragraph gegebenen Erklärung gemäß beizulegen sein wird, ist sehr einfach, und folgt ohne Weiteres aus der Entstehung derselben. Denn da hiernach die Bildung der höheren Differentialquotienten

auf einer bloßen Wiederholung der Bildung des ersten beruht, so wird natürlich auch die Bedeutung der höheren Differentialquotienten nur auf eine bloße Wiederholung der Bedeutung des ersten hinauslaufen können. Nun gibt, wenn man sich unter y irgend eine Function von x denkt, der erste Differentialquotient von y, oder der Werth der Function $\frac{dy}{dx}$ allgemein die momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachsens von y und x an; folglich wird die durch $\frac{d^2y}{dx^2}$ oder $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$ vorgestellte Function, als der erste Differentialquotient der Function $\frac{dy}{dx}$, die momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachsens der beiden veränderlichen Größen $\frac{dy}{dx}$ und x ausdrücken. Ebenso wird der dritte Differentialquotient der Function y, oder die unter dem Ausdruck $\frac{d^3y}{dx^3}$ vorgestellte Function von x, da sie nur als der erste Differentialquotient der Function $\frac{d^2y}{dx^2}$ aufgefaßt wird, die momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachsens der beiden veränderlichen Größen $\frac{d^2y}{dx^2}$ und x angeben, und in gleicher Weise wird die Bedeutung aller folgenden Differentialquotienten der Function y sich ergeben. Nimmt man zu dieser eben gegebenen kurzen Erklärung der Bedeutung der höheren Differentialquotienten dasjenige hinzu, was im vorhergehenden Paragraphen über ihre Bezeichnung gesagt worden ist, so hat man die ganze übliche Lehre von den höheren Differentialquotienten. Und wenn man weiter nichts von denselben wissen will als diese Bedeutung und den Rechnungsmechanismus ihrer Bildung und Bezeichnung, so bedarf es zur Darstellung dieser Lehre denn freilich keiner großen Umstände und keines weiteren Ausholens.

Hier ist nun der Ort, wo wir genauer und bestimmter angeben können, was wir von einer vollständigen Lehre von den höheren Differentialquotienten verlangen, und was wir an der gangbaren Lehre vermissen. Nach der vorher erklärten Bedeutung der höheren Differentialquotienten sagt uns z. B. der zweite Differentialquotient einer durch y vorgestellten Function von x nur etwas über die Eigenthümlichkeit des Wachsens der Größen $\frac{dy}{dx}$ und x, keineswegs aber über die der Größen y und x. Ebenso wird man durch den dritten Differentialquotient der Function y wieder auf andere Größen verwiesen, indem derselbe nur die momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachsens der beiden Größen $\frac{d^2y}{dx^2}$ und x angibt, direct aber über die Natur des Wachsens der beiden Größen y und x, deren dritten Differentialquotient man hat, und über deren Art des Wachsens man doch wol eigentlich einen Aufschluß erwarten sollte, uns gar nicht belehrt. Nun gibt es doch weitere über die momentane Stärke des Wachsens hinausliegende Eigenthümlichkeiten des Wachsens der Größen y und x. Denn die Stärke des Wachsens derselben ist *stetig* veränderlich, und es muß also in demselben Punkt, wo eine bestimmte Stärke des Wachsens eintritt, auch schon eine ihrer Größe und ihrem Maße nach zu bestimmende Veränderung der Stärke des Wachsens vorhanden sein, weil die Veränderung nicht wartet, bis die fließenden Größen um einen endlichen Größenwerth gewachsen sind. Dasselbe wird sich auf die Veränderung der Stärke des Wachsens anwenden lassen, wenn sie sich nicht als constant, sondern als stetig veränderlich erweist. Auch die alsdann blos momentane Veränderung der Stärke des Wachsens muß eine nach Größe und Maß zu bestimmende Veränderung zeigen. Alle diese Bestimmungen sind charakteristische Eigenthümlichkeiten des Wachsens der Größen y und x, und sollten uns nicht die höheren Differentialquotienten der

Function y einen Aufschluß über dieselben geben, und vielleicht auch die Regel der Berechnung ihres Größenwerthes enthalten?

Daß die aus der bloßen Wiederholung des Differentiirens abgeleitete Bedeutung der höheren Differentialquotienten, gemäß welcher jeder folgende Differentialquotient einer Function die Stärke des Wachsens des vorhergehenden Differentialquotienten und der willkürlich Veränderlichen dieser Function ausdrückt, nicht hinreicht, um eine deutliche Vorstellung von den erwähnten Eigenthümlichkeiten des Wachsens der ursprünglich Veränderlichen zu geben, ist leicht zu zeigen. Wir wollen dies an einigen geometrischen Beispielen erläutern, und zwar gerade an denjenigen, bei welchen allein man bisher einen Versuch der Nachweisung einer sogenannten geometrischen Bedeutung der höheren Differentialquotienten gemacht hat, worunter man versteht, daß die Werthe der höheren Differentialquotienten durch gewisse räumliche Gebilde repräsentirt erscheinen, und bei denen man also diese Nachweisung als verhältnißmäßig am leichtesten ausführbar angesehen hat. Wenn z. B. die senkrechte Ordinate einer Curve als Function der Abscisse gegeben ist, so drückt bekanntlich der für einen Curvenpunkt berechnete erste Differentialquotient dieser Function den Quotient zusammengehöriger Zunahmen der Coordinaten der diesen Curvenpunkt berührenden graden Linie aus, d. h. er drückt die trigonometrische Tangente des Winkels aus, welchen die berührende Grade mit der Abscisse bildet. Da dieser Winkel stetig veränderlich ist, so gibt es für jeden Verflußpunkt der Abscisse eine verhältnißmäßige Stärke des Wachsens der Tangente des genannten Winkels und der Abscisse. Diese Stärke des Wachsens ist es zunächst nur, welche man als durch den zweiten Differentialquotient der die Ordinate ausdrückenden Function dargestellt ansehen muß. Wenn ich nun z. B. fände, daß der zweite Differentialquotient dieser Function für einen bestimmten Zahlenwerth der Abscisse den Zahlen-

werth 2 hätte, so würde damit gesagt sein, daß die momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachsens der Tangente jenes Winkels und der Abscisse so groß sei, daß vermöge derselben, wenn sie zur Ausführung käme, mit einer Zunahme der Abscisse = 1 eine Zunahme der Tangente jenes Winkels = 2 verbunden sein würde. Diese Behauptung ist nun zwar ohne Zweifel ganz richtig, aber es läßt sich doch unmittelbar aus derselben nicht ersehen, welche Eigenthümlichkeit des Wachsens der Coordinaten der Curve durch ihren zweiten Differentialquotient ausgesprochen ist. Und obgleich es in diesem Falle noch nicht allzuschwierig sein würde, aus der verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens der trigonometrischen Tangente jenes Winkels und der Abscisse auf die Natur des Wachsens der Coordinaten der Curve und auf die Größe der Veränderung ihrer Stärke des Wachsens einen Schluß zu machen, so würde man sich doch schon bei dem dritten Differentialquotient in große Schwierigkeiten und Dunkelheiten verwickelt sehen, wenn man seinen Werth auf die Eigenthümlichkeiten des Wachsens der Coordinaten der Curve zurückbeziehen wollte. Nehmen wir ferner an, daß eine Curvenfläche als Function der Abscisse gegeben sei. Da der erste Differentialquotient dieser Function diejenige Function der Abscisse liefert, welche die Ordinate der Curve ausdrückt, so sagt man, der räumliche Repräsentant des ersten Differentialquotienten der Curvenfläche ist die Ordinate der Curve; und da der Differentialquotient der Ordinate die Tangente des Winkels ausdrückt, den die Berührende mit der Abscisse bildet, so sagt man, die Tangente dieses Winkels ist der räumliche Repräsentant des zweiten Differentialquotienten der Curvenfläche. So angesehen haben die höheren Differentialquotienten einer Function, welche eine Fläche ausdrückt, gar nichts mit der Fläche zu schaffen, indem man auf ganz andere räumliche Elemente, erst auf eine Linie und dann auf eine Winkelfunction geräth. Daß es dabei unmöglich wird zu sagen, welche Bestimmungen des Wachsens der Fläche durch die

höheren Differentialquotienten derselben ausgedrückt werden, versteht sich von selbst. Es muß auch auffallen, daß man nur für den ersten und zweiten Differentialquotient der Fläche einen räumlichen Repräsentanten nachweist, der dritte und die folgenden aber keine geometrische Bedeutung haben sollen. Indessen hat man nicht blos in früheren Zeiten, sondern auch in unsern Tagen diese und ähnliche Dinge alles Ernstes für die geometrische Bedeutung der höheren Differentialquotienten ausgegeben. Wir werden bald sehen, daß es, sobald man nur vorher die allgemeine Bedeutung, welche die höheren Differentialquotienten einer Function für das Wachsen dieser Function selbst haben, festgestellt hat, gar nicht schwer ist, für jeden beliebigen höheren Differentialquotienten einen räumlichen Repräsentanten seines Werthes nachzuweisen, und zwar nicht blos für den Fall, daß die räumlichen Elemente Parallelcoordinaten sind, woran man gewöhnlich nur denkt, wenn von der geometrischen Bedeutung der höheren Differentialquotienten die Rede ist, sondern in allen Fällen, in welchen irgend welche ganz beliebige räumliche Elemente als die von einander abhängigen veränderlichen Größen erscheinen.

Wenn nun vielleicht noch Jemand einwendete, die successiven Differentialquotienten einer durch y vorgestellten Function von x sollen eben weiter nichts bedeuten, als daß jeder folgende Differentialquotient die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens des vorhergehenden und der willkürlich Veränderlichen x ausdrückt, keineswegs aber sollen sie uns über die Natur des Wachsens der Größen y und x belehren, welches nur der erste Differentialquotient der Function y zu leisten hat, indem er die momentane Stärke des Wachsens der Größen y und x angibt, so erwidere ich: Nun gut, wenn das ist, so muß denn diejenige Lehre, welche zum Zwecke hat, die früher erwähnten über die bloße momentane Stärke des Wachsens der Veränderlichen hinausreichenden weiteren Eigenthümlichkeiten des Wachsens, die doch offenbar vorhanden sind, zu entwickeln und

in Gesetze zu fassen, noch neu erfunden werden. Denn jede genügende Theorie der Gesetze des gemeinschaftlich fortschreitenden Wachsens der Größen wird diese Untersuchungen nicht abweisen können, und um einen vollständigen Begriff zu haben von der in jedem Verflußpunkt vorhandenen wahren Beschaffenheit des Wachsens, muß man die Functionen auffinden, welche diese inneren Modificationen des Wachsens anzugeben im Stande sind. Aber diese Functionen brauchen wir zum Glück nicht weit zu suchen, denn die höheren Differentialquotienten leisten, wie wir in dem Folgenden sehen werden, dies Alles aufs Beste.

Es braucht schließlich wol kaum noch bemerkt zu werden, daß dem eben Gesagten nicht die Absicht zu Grunde liegt, die im Eingang dieses Paragraphen erwähnte Bedeutung eines höheren Differentialquotienten, welche er dadurch erhält, daß er als der erste Differentialquotient des vorhergehenden angesehen wird, für eine überflüssige und nutzlose zu erklären. Vielmehr ist dieselbe bei unzähligen Untersuchungen eine wesentliche und unerläßliche, und bei vielen andern eine zureichende, indem sehr häufig ein höherer Differentialquotient grade nur in diesem Sinne in die Rechnung eingeführt wird, daß er der erste Differentialquotient des vorhergehenden ist. Dies läßt sich an ganz einfachen Aufgaben zeigen. Bei der gradlinigten Bewegung z. B. beruht, wie früher (§. 41) schon nachgewiesen worden, die Bestimmung der Größe der Kraft auf der Angabe, um wie viel die Geschwindigkeit zu- oder abnimmt in einer gewissen Zeit vermöge der Kraft, d. h. sie beruht auf der verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens von Geschwindigkeit und Zeit. Ist also die Geschwindigkeit als Function der Zeit gegeben, so ist sicherlich der Differentialquotient dieser Function ein Ausdruck für die Größe der Kraft. Nun ist aber diejenige Function der Zeit, welche die Geschwindigkeit ausdrückt, der Differentialquotient einer andern Function der Zeit, welche den Raum ausdrückt, wie ebenfalls schon §. 41 gezeigt worden. Mithin

ist der zweite Differentialquotient der den Raum ausdrückenden Function der Zeit der Ausdruck für die Kraft. In sofern ich nun grade diese Beistimmung des Begriffs der Kraft im Sinne habe, daß sie die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens von Geschwindigkeit und Zeit angibt, so ist diejenige Bedeutung des zweiten Differentialquotienten von Raum und Zeit, vermöge welcher er die Stärke des Wachsens des ersten Differentialquotienten und der willkürlich Veränderlichen ausdrückt, vollkommen an ihrer Stelle und führt allein zum Zweck. Freilich kann der Begriff der Kraft auch durch die Art des Wachsens von Raum und Zeit selbst bestimmt werden, indem man angibt, um wie viel der in jeder folgenden Zeiteinheit durchlaufene Raum größer ist als der in der vorhergehenden Zeiteinheit durchlaufene, wenn die Kraft constant ist, oder um wie viel er größer sein würde, wenn die momentan vorhandene Größe der Kraft constant bliebe und zur Ausführung käme. Diese auf die Art des Wachsens von Raum und Zeit bezogene Definition des Begriffs der Kraft ist ebenso wichtig und unerläßlich als die auf das Wachsen von Geschwindigkeit und Zeit bezogene. Daß nun, sowie in dieser zweiten Definition des Begriffs der Kraft der zweite Differentialquotient von Raum und Zeit auf die Natur des Wachsens von Raum und Zeit selbst bezogen wird, überhaupt aus jedem höheren Differentialquotient beliebiger Größen seine Bedeutung für die Art des Wachsens dieser Größen selbst mit Leichtigkeit, Sicherheit, und nach allgemeinen festen Regeln herausgelesen werden könne, ist der Hauptzweck der nun folgenden von der bisherigen abweichenden Darstellung der Lehre von den höheren Differentialquotienten; und durch diesen Zweck wird es gerechtfertigt erscheinen, daß wir zur Begründung dieser Lehre einen andern Weg einschlagen und einen viel weiteren Anlauf nehmen.

§. 104.

Constante Beschleunigung des Wachsens.

In dem ersten Haupttheil unserer Wissenschaft sind wir, nach Vorausschickung des Begriffs der gleichmäßig wachsenden Größen, und der durch dieselben gegebenen Vorstellung einer bestimmten Stärke des Wachsens, zu den ungleichmäßig wachsenden übergegangen, und haben gezeigt, daß bei denselben mit gleichen Zunahmen der Einen immer ungleiche und zwar entweder immer größer oder immer kleiner werdende Zunahmen der Andern verbunden sind, oder daß, bezogen auf ein durch lauter gleiche Zunahmen fortschreitendes Wachsen der willkürlich Veränderlichen die abhängig Veränderliche entweder ein beschleunigtes oder retardirtes Wachsen zeigt. Dieser Begriff eines beschleunigten oder *retardirten* Wachsens wurde aber dort (§. 24) nur benutzt, um zu zeigen, daß die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens stetig veränderlich und in jedem Verflußpunkt eine bestimmte sei, nicht aber, um die Art oder die Größe dieser Beschleunigung oder Retardation des Wachsens ins Auge zu fassen. Vielmehr bezog sich alles bei der Lehre vom ersten Differentialquotient über die ungleichmäßig Wachsenden weiter Vorgebrachte nur auf die Angabe des Verfahrens, durch welches der einzelne vorüberfliegende Moment der veränderlichen Stärke des Wachsens ergriffen und seinem Werthe nach berechnet werden kann, keineswegs aber auf eine Vergleichung dieser momentanen Werthe, und auf ein daraus abzuleitendes Gesetz der Veränderung derselben. Hier nun machen wir die bei allen ungleichmäßig Wachsenden nothwendig vorhandene Beschleunigung oder Retardation des Wachsens, welche so gut als die Stärke des Wachsens zu den Eigenthümlichkeiten des Wachsens gehört, zum Gegenstand der Untersuchung, und reihen an die schon abgehandelte Frage, wie die momentane Stärke des Wachsens gefunden wird, die zweite, wie die mit derselben nothwendig verbundene Beschleunigung der Retardation des Wachsens ihrem Größenwerthe nach bestimmt und berechnet wird.

Es sei hier gleich bemerkt, daß wir in dem Folgenden der Kürze wegen schlechtweg von einem beschleunigten oder retardirten Wachsen der abhängig Veränderlichen sprechen werden, obgleich natürlich eine Größe für sich betrachtet kein beschleunigtes oder retardirtes Wachsen haben kann, sondern nur relativ zu einer andern mit ihr zugleich veränderlichen Größe, die als gleichförmig, d. h. durch lauter gleiche Zunahmen wachsend vorausgesetzt wird. Wenn also hinfort von einer abhängig Veränderlichen gesagt wird, daß sie beschleunigt wächst, oder daß ihre Zunahmen immer größer werden, so soll das heißen, daß die mit gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen verbundenen Zunahmen der abhängig Veränderlichen immer größer werden. Aehnlicherweise, wenn einer abhängig Veränderlichen ein retardirtes Wachsen beigelegt wird.

So wie die Vorstellung einer bestimmten Stärke des Wachsens veränderlicher Größen darauf beruht, daß mit gleichen Zunahmen der Einen gleiche Zunahmen der Andern verbunden gedacht werden, so kann man auch von einer bestimmten Beschleunigung oder Retardation des Wachsens der Größen nur in sofern eine Vorstellung erhalten, als vorausgesetzt wird, daß mit gleichen Zunahmen der Einen immer gleiche Vergrößerungen oder gleiche Verkleinerungen der successiven Zunahmen der Andern verbunden sind, oder daß die mit den gleichen Zunahmen der Einen verbundenen successiven Zunahmen der Andern lauter gleiche Unterschiede haben. Wenn z. B. in einer ungleichförmigen Bewegung mit gleichen Zunahmen der Zeit immer größere Zunahmen des Raumes verbunden sind, und also der Raum beschleunigt wächst, so habe ich von dieser Beschleunigung des Wachsens offenbar eine ganz bestimmte Vorstellung, wenn ich etwa sage, sie ist von der Art, daß der in jeder folgenden Secunde durchlaufene Raum um 20 Fuß größer ist, als der in der vorhergehenden Secunde durchlaufene, oder daß die mit gleichen Zunahmen der Zeit, im Werth von 1 Secunde, verbundenen successiven Zu-

nahmen des Raumes, in Fußen ausgedrückt, den constanten Unterschied 20 zeigen. Man nennt das Wachsen der Größen ein gleichförmig beschleunigtes, und die Beschleunigung selbst eine constante, wenn die mit gleichen, selbst beliebig kleinen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen verbundenen Zunahmen der abhängig Veränderlichen immer um gleichviel größer werden; werden dieselben immer um gleichviel kleiner, so heißt das Wachsen ein gleichförmig retardirtes, und die Retardation des Wachsens eine constante. Nur in sofern eine Beschleunigung oder Retardation des Wachsens constant gedacht wird, kann sie uns die Vorstellung einer bestimmten Größe der Beschleunigung liefern. Denn sind die mit gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen verbundenen Zunahmen der abhängig Veränderlichen von der Art, daß ihre Unterschiede überall ungleich sind, so wird, wie leicht zu sehen, die Größe der Beschleunigung für einen und denselben Verflußpunkt der willkürlich Veränderlichen verschieden gefunden, je nachdem man größere oder kleinere Zunahmen der willkürlich Veränderlichen setzen, und den Unterschied der zugehörigen Zunahmen der abhängig Veränderlichen als das Maß der Beschleunigung annehmen wollte. Wir haben also aus demselben Grunde, warum wir früher den Untersuchungen über die veränderliche Stärke des Wachsens eine genauere Betrachtung der gleichmäßig wachsenden Größen mit constanter Stärke des Wachsens vorausschickten, jetzt der Lehre von der veränderlichen Beschleunigung des Wachsens eine Erörterung der gleichförmig beschleunigt wachsenden Größen voranzustellen.

Zunächst wollen wir den aufgestellten Begriff der constanten Beschleunigung des Wachsens noch in einigen Beispielen näher betrachten; und da uns in der Regel Begriffsbestimmungen erst dann recht sicher und geläufig werden, wenn wir sie uns durch räumliche Gebilde veranschaulicht, wenn wir sie mit Augen gesehen haben, so wollen wir geometrische Beispiele wählen. Es

sei $y = \frac{1}{3} x^2$ die Gleichung zwischen den senkrechten Parallelcoordinaten einer Curve. Bekanntlich ist dies die Gleichung der gemeinen Parabel für eine gewisse Lage ihrer Coordinatenaxen. In dieser Lage der Coordinatenaxen haben die Ordinaten der Parabel ein gleichförmig beschleunigtes Wachsen, weil, wie leicht zu sehen, in der Function $\frac{1}{3} x^2$ mit gleichen Zunahmen des x solche Zunahmen der Function verbunden sind, die immer um gleich viel größer werden. Sei der Punkt a (Fig. 50) der Nullpunkt der Abscisse, und lassen wir von diesem Punkt aus die Abscisse um gleiche Stücke im Werthe von 1 wachsen, so daß die Abscissen ab, ac, ad, ae der Reihe nach die Zahlenwerthe 1, 2, 3, 4 haben, so sind die Zahlenwerthe der Ordinaten bf, cg, dh, ei vermöge der gegebenen Gleichung der Reihe nach gleich $\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{9}{3}, \frac{16}{3}$. Zieht man jede Ordinate von der darauf folgenden ab, so erhält man in den Zahlen $\frac{3}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}$, welchen die Linien kg, lh, mi der Figur entsprechen, die Zunahmen der Ordinaten, welche mit den gleichen Zunahmen der Abscisse verbunden sind. Von diesen Zunahmen der Ordinaten ist jede folgende um $\frac{2}{3}$ größer als die vorhergehende, und diese Ordinaten haben also eine durch die Zahl $\frac{2}{3}$ ihrer Größe nach bestimmte Beschleunigung des Wachsens.

Betrachten wir, um ein ebenso anschauliches Beispiel von gleichförmiger Retardation des Wachsens zu haben, die Ordinaten der Curve Fig. 51, deren Gleichung $y = 2x - \frac{1}{4} x^2$ ist. Diese Gleichung liefert ebenfalls die gemeine Parabel nur für eine andere Lage der Coordinatenaxen. Im Punkt a ist der Nullpunkt der Abscisse an-

genommen. Seien die Theile ab, bc, cd, de der Abscisse sämmtlich gleich 1, so haben gemäß der gegebenen Gleichung die Ordinaten bf, cg, dh, ei der Reihe nach die Zahlenwerthe $\frac{7}{4}$, $\frac{12}{4}$, $\frac{15}{4}$, $\frac{16}{4}$. Ziehen wir jede Ordinate von der darauffolgenden ab, so geben die Reste $\frac{5}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$, welche den Linien kg, lh, mi entsprechen, die Zunahmen der Ordinaten an, welche mit den gleichen Zunahmen der Abscisse im Werthe von 1 verbunden sind. Von diesen Zunahmen der Ordinaten ist jede folgende um $\frac{2}{4}$ kleiner als die vorhergehende, und die Ordinaten der Parabel haben also für diese Lage ihrer Coordinatenaxen ein gleichförmig retardirtes Wachsen.

Ein anderes sehr anschauliches Beispiel der constanten Beschleunigung und Retardation des Wachsens bieten die Flächenräume dar, welche durch das Fortrücken der Parallelordinaten einer gegen ihre Abscisse geneigten graden Linie gebildet werden. Läßt man in Fig. 52, in welcher ac, bf u. s. w. die senkrechten Ordinaten der graden Linie eh sind, die Abscisse um gleiche Stücke ab, bc, cd, wachsen, so sind die damit verbundenen Zunahmen der Fläche der Figur von der Art, daß sie sich immer um gleich viel vergrößern, nämlich, wie leicht zu sehen, immer um das Parallelogramm bcki, welches eine von den gleichen Zunahmen der Abscisse bc zur Grundlinie und die zugehörige Zunahme gm der Ordinate zur Höhe hat. Die Fläche dieser Figur ist also bezogen auf die Abscisse als willkürlich Veränderliche eine gleichförmig beschleunigt wachsende Größe. Wenn, wie in Fig. 53, die senkrechten Ordinaten der graden Linie eh im Abnehmen begriffen sind, und die Abscisse um gleiche Stücke ab, bc, cd wächst, so werden die damit verbundenen Zunahmen der Fläche der Figur immer um gleich viel kleiner werden, nämlich immer um das Parallelogramm abki, welches eine von den gleichen Zunahmen der Abscisse

zur Grundlinie, und die zugehörige Abnahme em der Ordinate zur Höhe hat, und diese Fläche zeigt also eine constante Retardation des Wachsens.

Bisher ist in den angeführten Beispielen sowol als auch in den vorausgegangenen Begriffsbestimmungen immer nur von einer Beschleunigung und Retardation des Wachsens die Rede gewesen. Es versteht sich aber von selbst, daß wenn mit dem Wachsen der willkürlich Veränderlichen ein Abnehmen der abhängig Veränderlichen verbunden ist, die Abnahmen der abhängig Veränderlichen, die mit gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen verbunden sind, entweder immer größer oder immer kleiner werden können, und also auch eine Beschleunigung oder Retardation des Abnehmens stattfinden kann. Unsere beiden Parabeln Fig. 50 und 51 können, wenn wir sie in ihren beiden andern auf der entgegengesetzten Seite der Hauptaxe liegenden Hälften betrachten, gleich dienen, um durch die Abnahme ihrer Ordinaten die Begriffe einer gleichförmigen Beschleunigung und Retardation des Abnehmens zu veranschaulichen. Nehmen wir zuerst die Parabel Fig. 50, und lassen ihre Abscisse vom Punkt q, wo sie den Werth -4 haben soll, durch gleiche positive Incremente im Werth von 1 wachsen, so daß die Abscisse in den Punkten q, p, o, n, a der Reihe nach die Zahlenwerthe $-4, -3, -2, -1, 0$, hat, so haben, gemäß der gegebenen Gleichung $y = \frac{1}{3}x^2$ in den Punkten q, p, o, n, a die Ordinaten der Reihe nach die Zahlenwerthe $\frac{16}{3}, \frac{9}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}, 0$. Zieht man jede Ordinate von der darauffolgenden ab, so stellen die als negative Zunahmen erhaltenen Zahlen $-\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{3}{3}, -\frac{1}{3}$, welche ihrer Größe nach den Linien uv, tw, sz, rn entsprechen, die Abnahmen der Ordinaten vor, welche mit den gleichen Zunahmen der Abscisse im Werthe von 1 verbunden sind. Da nun von diesen Abnahmen, als Abnah-

men, d. h. nach ihren absoluten Zahlenwerthen betrachtet, jede folgende um $\frac{2}{3}$ kleiner ist als die vorhergehende, so stellen die Ordinaten dieser Parabel in den Grenzen vom Punkt q bis zum Punkt a eine gleichförmige Retardation des Abnehmens dar, wie sie in den Grenzen von a bis e eine gleichförmige Beschleunigung des Wachsens darstellten.

Betrachten wir ebenso in der Parabel Fig. 51 die andere Hälfte, und nehmen an, daß die Abscisse in den Punkten e, n, o, p, q der Reihe nach die Zahlenwerthe 4, 5, 6, 7, 8 hat, so haben, gemäß der gegebenen Gleichung $y = 2x - \frac{1}{4}x^2$, die den Punkten e, n, o, p, q zugehörigen Ordinaten die Werthe $\frac{16}{4}$, $\frac{15}{4}$, $\frac{12}{4}$, $\frac{7}{4}$, 0. Zieht man jede Ordinate von der darauffolgenden ab, so stellen die als negative Zunahmen erhaltenen Zahlenwerthe $-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4} - \frac{5}{4} - \frac{7}{4}$, welche den Linien im, rn, sv, tp entsprechen, die Abnahmen dar, welche mit den gleichen Zunahmen der Abscisse im Werthe von 1 verbunden sind. Da nun von diesen Abnahmen, in sofern sie nach ihren absoluten Zahlenwerthen betrachtet werden, jede folgende um $\frac{2}{4}$ größer ist als die vorhergehende, so hat man in den Ordinaten dieser zweiten Hälfte der Parabel eine gleichförmige Beschleunigung des Abnehmens, wie man in denen der ersten Hälfte eine gleichförmige Retardation des Wachsens hatte.

Obgleich man hiernach bei der Veränderung der Stärke des Wachsens eigentlich vier Fälle zu unterscheiden hat, indem dieselbe sich als eine Beschleunigung und Retardation des Wachsens und als eine Beschleunigung und Retardation des Abnehmens darstellen kann, so ist es doch gestattet und der Allgemeingültigkeit des Ausdrucks wegen in vielen Fällen wünschenswerth, in der Art, wie früher

die Abnahmen als negative Zunahmen unter den Begriff der Zunahmen subsumirt, und Wachsen und Abnehmen zusammen in dem Begriff des Wachsens befaßt wurden, auch hier die in der Parabel Fig. 50 vereinigt vorkommenden Fälle der Retardation des Abnehmens und der Beschleunigung des Wachsens unter Einen Begriff zu fassen, und ebenso die in der Parabel Fig. 51 vereinigt vorkommenden Fälle der Retardation des Wachsens und der Beschleunigung des Abnehmens. Wir setzen dabei voraus, daß man den Unterschied zweier Werthe der abhängig Veränderlichen immer so bilde, daß man einen vorhergehenden Werth von einem nachfolgenden abziehe, und daß man den dadurch erhaltenen positiven oder negativen Rest allgemein eine Zunahme nenne. Ebenso daß man unter dem Unterschied der Zunahmen immer versteht den positiven oder negativen Rest, den man durch Abziehung einer vorhergehenden Zunahme von der nachfolgenden erhält. Diesen letzteren Rest kann man allgemein die Zunahme der Zunahme nennen, obgleich er eigentlich in den einzelnen Fällen bald eine Zunahme oder Abnahme der Zunahme, bald eine Zunahme oder Abnahme der Abnahme ist. Betrachten wir nun eine Retardation des Abnehmens, so werden bei derselben die Abnahmen, d. h. die negativen Zunahmen immer kleiner. Die vorhergehende negative Zunahme von der folgenden abgezogen, läßt also einen positiven Rest. Bei der Retardation des Abnehmens entsteht demnach die folgende Zunahme aus der vorhergehenden durch Hinzufügen einer positiven Zahl. Will man das Zusetzen von positiven Zahlen allgemein eine Vergrößerung nennen, so kann man sagen, daß bei der Retardation des Abnehmens ebenso gut als bei der Beschleunigung des Wachsens die Zunahmen immer größer werden. Die in den beiden Hälften der Parabel Fig. 50 enthaltenen Fälle kommen also in sofern auf Einen zurück, als in beiden dasjenige, worauf es bei Bestimmung der Veränderung der Stärke des Wachsens allein ankommt, nämlich der Unterschied der Zunahmen, durch dieselbe positive

Zahl $\frac{2}{3}$ ausgedrückt wird, und demnach die Veränderung der Stärke des Wachsens sich in dem ganzen Verlauf der Parabel als dieselbe erweist. Wenn beide Fälle, in welchen der Unterschied der Zunahmen positiv ist, und im angegebenen Sinne die Zunahmen immer größer werden, mit Einem Wort bezeichnet werden sollen, so wollen wir sie Beschleunigung des Wachsens nennen. Betrachten wir ferner die Beschleunigung des Abnehmens, so werden bei derselben die Abnahmen, d. h. die negativen Zunahmen, immer größer. Die vorhergehende Zunahme von der folgenden abgezogen läßt also einen negativen Rest. Bei der Beschleunigung des Abnehmens entsteht demnach die folgende Zunahme aus der vorhergehenden durch Zufügen einer negativen Zahl. Will man das Zusetzen von negativen Zahlen allgemein eine Verkleinerung nennen, so ist es erlaubt zu sagen, daß bei der Beschleunigung des Abnehmens nicht minder als bei der Retardation des Wachsens die Zunahmen immer kleiner werden. Die in den beiden Hälften der Parabel Fig. 51 enthaltenen Fälle der Veränderung der Stärke des Wachsens fallen also in sofern in Einen zusammen, als in beiden der Unterschied der Zunahmen durch dieselbe negative Zahl $\frac{1}{2}$ gegeben ist, und demnach diese Veränderung sich in dem ganzen Verlauf der Curve als dieselbe darstellt. Wenn beide Fälle, in welchen der Unterschied der Zunahmen negativ ist, oder die Zunahmen in dem obigen Sinne immer kleiner werden, durch einen gemeinschaftlichen Namen bezeichnet werden sollen, so mögen sie eine Retardation des Wachsens heißen.

Indessen wird, wie leicht zu sehen, durch solche Verallgemeinerungen der Ausdrücke, indem man unter Zunahme auch eine Abnahme versteht, und die Verkleinerung einer negativen Zahl eine Vergrößerung derselben nennt, und entsprechend unter einer Beschleunigung des Wachsens auch eine Retardation des Abnehmens versteht u. s. w.,

der Anschaulichkeit der Vorstellungen ebenso viel Abbruch gethan, als der Kürze des Ausdrucks durch die Zusammenfassung verschiedener Fälle Vorschub geleistet wird. Nimmt man das Wort Zunahme allgemein, so kann man sagen, daß in allen vier Fällen einer gleichförmigen Beschleunigung oder Retardation des Wachsens und des Abnehmens die Zunahmen der Zunahmen constant sind. Wenn die Veränderung der Stärke des Wachsens überhaupt mit Einschluß aller vier Fälle und ohne Unterscheidung derselben durch Ein Wort bezeichnet werden soll, so sagen wir schlechtweg Beschleunigung des Wachsens, wie wir auch in der Ueberschrift dieses Paragraphen schon gethan haben. Es braucht wol kaum bemerkt zu werden, daß durch diese Verallgemeinerungen des Ausdrucks die Unterschiede der einzelnen vier Fälle nicht als unwesentliche bezeichnet werden sollen. Vielmehr kommt es häufig, wie wir später sehen werden, auf ihre genaue Unterscheidung an, besonders in der Lehre von den Uebergangspunkten des einen Falles in den andern, deren charakteristische Eigenschaften eben auf der Unterscheidung der einzelnen Fälle beruhen.

§. 105.

Allg. Maß der constanten Beschleunigung des Wachsens.

Bei den in dem Vorhergehenden betrachteten Beispielen der constanten Beschleunigung oder Retardation des Wachsens haben wir den Zunahmen der willkürlich Veränderlichen immer den Zahlenwerth 1 beigelegt, und uns durch den constanten Unterschied der zugehörigen Zunahmen der abhängig Veränderlichen eine Vorstellung von der Größe der Beschleunigung des Wachsens gebildet, oder wir haben diesen Unterschied kurzweg als Maß der Beschleunigung des Wachsens angesehen. Aber es ist, um den gehörigen Gebrauch von dem Begriff der constanten Beschleunigung des Wachsens zu machen, nöthig, das constante Maß derselben auf eine Art auszudrücken, welche von der zufälligen Größe der Zunahmen der willkürlich Veränderlichen unabhängig ist,

und für jede beliebig große Zunahme der willkürlich Veränderlichen immer einen und denselben Zahlenwerth liefert. Bei gleichmäßig wachsenden Größen hatte es gar keine Schwierigkeit, für die constante Stärke des Wachsens einen von der zufälligen Größe der Zunahmen der willkürlich Veränderlichen unabhängigen constanten Ausdruck zu finden, weil die Zunahmen derselben in gleichem Verhältniß wachsen und abnehmen, und also der Quotient der Zunahmen constant ist. Man würde nun vielleicht erwarten, daß bei gleichförmiger Beschleunigung des Wachsens die Zunahmen der willkürlich Veränderlichen und die Unterschiede der Zunahmen der abhängig ebenfalls ein constantes Verhältniß hätten, und man also durch den Quotienten beider die constante Beschleunigung des Wachsens ausdrücken könnte. Allein darin irrt man sehr, und die gleichmäßig wachsenden Größen und die gleichförmig beschleunigt wachsenden sind in dieser Hinsicht wesentlich verschieden. Läßt man z. B., um zuerst einen speciellen Fall zu betrachten, in der Function $\frac{1}{3}x^2$ die willkürlich Veränderliche nicht wie früher um den Zahlenwerth 1, sondern um den Zahlenwerth $\frac{1}{2}$ wachsen, und gibt ihr die Werthe $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}$ u. s. w., so sind die zugehörigen Werthe der Function $0, \frac{1}{12}, \frac{4}{12}, \frac{9}{12}, \frac{16}{12}$. Zieht man jeden dieser Werthe der Function von dem folgenden ab, so erhält man in den Zahlen $\frac{1}{12}, \frac{3}{12}, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}$ die Zunahmen der Function, die mit gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen im Werthe von $\frac{1}{2}$ verbunden sind. Die Unterschiede dieser Zunahmen der Function sind constant und gleich $\frac{2}{12}$. Nun sahen wir

früher, daß in der Function $\frac{1}{3}x^2$ für Zunahmen der willkürlich Veränderlichen gleich 1, die Unterschiede der Zunahmen der Function gleich $\frac{2}{3}$ waren, und für halb so große Zunahmen der willkürlich Veränderlichen finden wir jetzt diese Unterschiede nicht halb so groß, sondern viermal kleiner. Um zunächst bei der vorliegenden Function zu erfahren, nach welcher Regel mit der Veränderung der Zunahme der willkürlich Veränderlichen der Unterschied der Zunahmen der Function sich ändert, brauchen wir nur den Unterschied der Zunahmen der Function allgemein für eine unbestimmte Zunahme $\varDelta x$ der willkürlich Veränderlichen auszudrücken. Dies erreicht man, indem man die willkürlich Veränderliche x zweimal um die Größe $\varDelta x$ wachsen läßt, d. h. der willkürlich Veränderlichen die drei Werthe x, $x+\varDelta x$ und $x+2\varDelta x$ beilegt, die zugehörigen Werthe der Function ausdrückt, und durch Abziehung erst die Zunahmen, und dann den Unterschied der Zunahmen herstellt. Wenden wir dies Verfahren an auf die Function $\frac{1}{3}x^2$, so sind die den drei Werthen x, $x+\varDelta x$ und $x+2\varDelta x$ der willkürlich Veränderlichen entsprechenden Werthe der Function $\frac{1}{3}x^2$, $\frac{1}{3}(x+\varDelta x)^2$ und $\frac{1}{3}(x+2\varDelta x)^2$, und nach Ausführung der vorgeschriebenen Potenzirung $\frac{1}{3}x^2$, $\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x\varDelta x+\frac{1}{3}(\varDelta x)^2$ u. $\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{3}x\varDelta x+\frac{4}{3}(\varDelta x)^2$. Ziehen wir jeden Werth der Function von dem Darauffolgenden ab, so erhalten wir in den Ausdrücken $\frac{2}{3}x\varDelta x+\frac{1}{3}(\varDelta x^2)$ und $\frac{2}{3}x\varDelta x+\frac{3}{3}(\varDelta x)^2$ die Zunahmen der Function; und nach Abziehung der ersten Zunahme von der zweiten stellt der Rest $\frac{2}{3}(\varDelta x)^2$ den Un=

terschied der Zunahmen der Function dar für die beliebigen gleichen Zunahmen Δx der willkürlich Veränderlichen. Wir sehen also, daß der Unterschied der Zunahmen, da er ein Product aus der constanten Zahl $\frac{2}{3}$ und dem Quadrat von Δx ist, im quadratischen Verhältniß von Δx ab- und zunimmt, wie wir auch vorher in dem Zahlenbeispiel schon sahen, daß für eine halb so große Zunahme der willkürlich Veränderlichen der Unterschied der Zunahmen viermal so klein wurde. Es wird mithin in der Function $\frac{1}{3}x^2$ der Unterschied der Zunahmen der Function dividirt durch das Quadrat der Zunahme von x die von dieser letzteren Zunahme unabhängige gesuchte constante Zahl, nämlich die Zahl $\frac{2}{3}$, liefern, welche als allgemeines Maß der Beschleunigung des Wachsens dieser Function dienen kann.

Wenn man auch in der andern von uns oben als Beispiel der gleichförmigen Retardation des Wachsens gebrauchten Function, nämlich in der Function $2x - \frac{1}{4}x^2$, den Unterschied der Zunahmen der Function allgemein in Bezug auf eine beliebige Zunahme Δx der willkürlich Veränderlichen ausdrücken wollte, und demgemäß für die drei Werthe x, $x + \Delta x$ und $x + 2\Delta x$ der willkürlich Veränderlichen die Werthe der Function berechnete, und durch Abziehung derselben von einander erst die Zunahmen und dann den Unterschied der Zunahmen bildete, so würde man diesen Unterschied allgemein gleich $-\frac{1}{2}(\Delta x)^2$ erhalten, und folglich würde ein beliebiger Unterschied der Zunahmen der Function dividirt durch das Quadrat der zugehörigen Zunahme des x die constante Zahl $-\frac{1}{2}$ liefern.

Obgleich wir nun die allgemeine Function, durch welche

alle Größen, die eine gleichförmige Beschleunigung oder Retardation des Wachsens oder Abnehmens haben, ausgedrückt werden, noch nicht kennen, und wir bisher nur einzelne hierhergehörige Functionen, wie die Functionen $\frac{1}{3}x^2$ und $2x - \frac{1}{4}x^2$ willkürlich herausgegriffen haben, so ist es doch leicht zu beweisen, daß bei allen solchen Größen der Unterschied der Zunahmen der abhängig Veränderlichen durch das Quadrat der Zunahme der willkürlich Veränderlichen dividirt werden müsse, um einen constanten Quotient zu erhalten. Denn die mit gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen verbundenen Zunahmen der abhängig Veränderlichen bilden eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung. Stellen wir das Anfangsglied dieser Reihe durch A, die Differenz durch D vor, so bedeuten die einzelnen Glieder der Reihe

$$A, \; A + D, \; A + 2D, \; A + 3D, \text{ u. s. w.}$$

die successiven Zunahmen der abhängig Veränderlichen. Nehmen wir nun z. B. an, daß die gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen dreimal kleiner genommen würden, so erhielt man statt jeder der Zunahmen A, A + D, u. s. w. drei Zunahmen der abhängig Veränderlichen, welche selbst eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung bilden. Nennen wir das Anfangsglied der neuen Reihe a, die Differenz derselben d, so werden in der erhaltenen Reihe

$$a, \; a + d, \; a + 2d, \; a + 3d, \text{ u. s. w.}$$

die drei ersten Glieder zusammen gleich A und die drei nächsten zusammen A + D sein. Man erhält also die Gleichungen $3a + 3d = A$ und $3a + 12d = A + D$, und daraus durch Abziehung der ersten Gleichung von der zweiten $9d = D$. Man sieht also, daß die Differenz der neuen Reihe 9 Mal so klein ist als die der früheren, d. h. daß der Unterschied der Zunahmen der abhängig Veränderlichen 9 Mal kleiner wird, wenn man die Zunahme der willkürlich Veränderlichen 3 Mal kleiner macht. Um den Be-

weis allgemein zu machen, so erinnere man sich, daß aus der Reihe

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \text{u. s. w.}$$

deren Glieder die Zunahmen der abhängig Veränderlichen vorstellen sollen, wieder eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung entsteht, wenn man die Summen von je gleichviel aufeinanderfolgenden Gliedern als die Glieder der neuen Reihe betrachtet. Denkt man sich nun die Zunahme der willkürlich Veränderlichen n mal so groß, so wird die Summe der n ersten Glieder der vorstehenden Reihe gleich der ersten Zunahme der abhängig Veränderlichen, und die Summe der nächstfolgenden n Glieder der Reihe der zweiten Zunahme derselben gleich sein. Die Summe der n ersten Glieder der Reihe ist aber, da a das erste und $a+(n-1)d$ das *n*te Glied ist, nach der bekannten Regel der Summation einer arithmetischen Reihe gleich $na+\frac{n(n-1)}{2}d$, und die Summe der nächstfolgenden n Glieder, unter denen $a+nd$ das erste und $a+(2n-1)d$ das letzte ist, wird gleich $na+\frac{n(3n-1)}{2}.d$ sein. Die erste Zunahme der abhängig Veränderlichen ist also $na+\frac{n(n-1)}{2}.d$ und die zweite $na+\frac{n(3n-1)}{2}.d$. Zieht man die erste Zunahme von der zweiten ab, so erhält man n^2d, als den Unterschied der Zunahmen. Wir sehen also, daß, wenn vorher der Unterschied der Zunahmen gleich d war, derselbe für n mal so große Zunahmen der willkürlich Veränderlichen gleich n^2d ist, und folglich im quadratischen Verhältniß der Zunahme der willkürlich Veränderlichen wächst.

Man konnte die Richtigkeit dieses Satzes sehr einfach und anschaulich auch auf geometrischem Wege einsehen. Die Flächenräume Fig. 52 und 53 können als Bild aller gleichförmig beschleunigt oder retardirt wachsenden Größen dienen. Das aus einer von den gleichen Zunahmen der

Abscisse und der zugehörigen Zu- oder Abnahme der Ordinate gebildete Parallelogramm bcki oder abki stellt den Unterschied der Flächenzunahmen dar. Nimmt man nun die gleichen Zunahmen der Abscisse z. B. halb so groß, so wird nicht blos die Grundlinie, sondern auch die Höhe dieses Parallelogramms halb so groß, und folglich wird das den Unterschied der Flächenzunahmen darstellende Parallelogramm viermal so klein, und sofort bei allen beliebigen Vergrößerungen oder Verkleinerungen der Zunahmen der Abscisse.

Schließlich haben wir noch die Bezeichnungsweise zu erwähnen, durch welche die bisher entwickelten Begriffe ausgedrückt werden. Das leicht verständlichste Verfahren, um den Unterschied der Zunahmen der abhängig Veränderlichen, die mit gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen im Werthe von $\varDelta x$ verbunden sind, zu finden, ist allerdings das, welches wir in den obigen Beispielen angewendet haben, nämlich daß man der willkürlich Veränderlichen drei Werthe x, $x+\varDelta x$ und $x+2\varDelta x$ ertheilt, und aus den drei zugehörigen Werthen der Function erst die Zunahmen und dann den Unterschied der Zunahmen berechnet. Diese Art der Bildung des Unterschiedes der Zunahmen ist jedoch für die Erklärung der Bezeichnung nicht bequem. Man konnte denselben Werth aber auch auf folgendem etwas abweichendem Wege darstellen. Ist nämlich y eine Function von x, und setzt man in derselben $x+\varDelta x$ statt x, und zieht von dem so erhaltenen Werth der Function ihren früheren Werth ab, so erhält man diejenige Zunahme der Function y, welche entsteht, indem die willkürlich Veränderliche vom Zahlenwerth x aus um $\varDelta x$ wächst, allgemein als eine Function von x, welche Function man bekanntlich durch $\varDelta y$ bezeichnet. In sofern man für alle veränderlichen Werthe von x dem $\varDelta x$ einen zwar beliebigen, aber unveränderlichen Werth beigelegt denkt, ist $\varDelta y$ nur eine Function der Veränderlichen x. Setzt man in der durch $\varDelta y$ vorgestellten Function von Neuem

$x + \Delta x$, so erhält man offenbar diejenige Zunahme der Function y, welche entsteht, indem die willkürlich Veränderliche von dem Zahlenwerth $x + \Delta x$ aus um die Zahl Δx wächst. Zieht man nun von diesem zweiten Werth der Function Δy ihren früheren Werth ab, so hat man in dem Rest wieder den Unterschied zweier Zunahmen der Function y, welche dadurch entstehen, daß die willkürlich Veränderliche von dem Zahlenwerth x aus zweimal um die Zahl Δx wächst. Hierbei ist genau dasselbe Verfahren der Differenzenbildung, durch welches man aus der Function y die Function Δy bildet, auch auf die Function Δy angewendet worden; und man kann demnach auch dieselbe Bezeichnungsweise wieder auf die Function Δy anwenden, und wird unter dem Ausdruck $\Delta\Delta y$ zu denken haben, erstens, wie sich von selbst versteht, den Unterschied zweier Werthe der Function Δy, welche den Werthen x und $x + \Delta x$ der willkürlich Veränderlichen zugehörig sind, und zweitens, wie soeben nachgewiesen, den Unterschied zweier Zunahmen der Function y, welche dadurch entstehen, daß die willkürlich Veränderliche vom Zahlenwerth x aus zweimal um die Zahl Δx wächst. Die letztere Ausdrucksweise der Bedeutung von $\Delta\Delta y$ ist es, welche sich unserer Erklärung der Beschleunigung des Wachsens zunächst anschließt, und die wir daher auch jetzt gebrauchen wollen. Wir würden nun, da wir früher fanden, daß in der Function $\frac{1}{3}x^2$ der Unterschied zweier Zunahmen der Function, die mit zwei gleichen Zunahmen Δx der willkürlich Veränderlichen verbunden sind, gleich $\frac{2}{3}(\Delta x)^2$ ist, dies Resultat durch die analytische Differenzengleichung $\Delta\Delta\frac{1}{3}x^2 = \frac{2}{3}(\Delta x)^2$ ausdrücken können, und ebenso das für die Function $2x - \frac{1}{4}x^2$ gefundene Resultat durch die Gleichung $\Delta\Delta(2x - \frac{1}{4}x^2) = -\frac{1}{2}(\Delta x)^2$.

Da nun in allen Fällen, wo eine gleichförmige Beschleunigung oder Retardation des Wachsens oder Abnehmens stattfindet, der Unterschied der Zunahmen der abhängig Veränderlichen dividirt durch das Quadrat der Zunahme der willkürlich Veränderlichen einen constanten Quotient gibt, so ist die Gleichung $\frac{\Delta\Delta y}{(\Delta x)^2} = a$ ebenso charakteristisch für die gleichförmige Beschleunigung des Wachsens der Größen x und y, wie die Gleichung $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$ für das gleichmäßige Wachsen derselben. Wie der Ausdruck $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ der erste Differenzquotient heißt, so heißt $\frac{\Delta\Delta y}{(\Delta x)^2}$ der zweite Differenzquotient. Gleichförmige Beschleunigung oder Retardation des Wachsens kann also auch so definirt werden, daß der zweite Differenzquotient constant ist. Für den Fall, daß man die Zahl Δx gleich 1 annimmt, geht die Gleichung $\frac{\Delta\Delta y}{(\Delta x)^2} = a$ über in die Gleichung $\Delta\Delta y = a$, und der constante zweite Differenzquotient wird dem Unterschied der Zunahmen der abhängig Veränderlichen gleich. Die Bedeutung einer Zahl a, durch welche eine gleichförmige Beschleunigung des Wachsens bezeichnet wird, kann demnach immer kurz so ausgesprochen werden: Die Zunahmen der abhängig Veränderlichen werden um a größer, wenn die willkürlich Veränderliche mehrmals um die Zahl 1 wächst. Im gemeinen Leben, in soweit überhaupt in demselben dergleichen Begriffe mit Klarheit gefaßt und ausgesprochen werden, verfährt man immer so, daß man eine gleichförmige Beschleunigung des Wachsens nicht anders als bezüglich auf Zunahmen der willkürlich Veränderlichen vom Zahlenwerth 1 bestimmt, wie man etwa, um die gleichförmig beschleunigte Bewegung des freien Falles der Körper zu bezeichnen, sagt, der in jeder folgenden Secunde durchlaufene Raum ist um 30 Fuß größer, nicht aber, der in jeder folgenden Viertelsecunde

durchlaufene Raum ist um $\frac{30}{16}$ oder um $1\frac{3}{8}$ Fuß größer, obgleich das Eine ganz dasselbe ist, was das Andere. Man weiß ja nicht einmal unmittelbar, daß durch beide Ausdrucksweisen, nämlich durch 30 Fuß Raumvergrößerung für 1 Secunde und durch $1\frac{3}{8}$ Fuß für $\frac{1}{4}$ Secunde, genau dieselbe Größe der Beschleunigung der Fallbewegung bezeichnet wird. Ebensowenig wird man, um die Fallbewegung zu bezeichnen, sagen, die in Fußen ausgedrückten Unterschiede der Zunahmen des Raumes, dividirt durch das Quadrat der in Secunden ausgedrückten gleichen Zunahmen der Zeit, geben den constanten Quotient 30. Denn eine solche Ausdrucksweise hat etwas durchaus Unanschauliches, wie sehr sie auch für die wissenschaftliche Behandlung des Begriffs der Beschleunigung des Wachsens förderlich und selbst unentbehrlich ist.

§. 106.

Allg. Function der gleichförmig beschleunigt wachsenden Größen.

Nachdem wir die Begriffe der constanten Beschleunigung des Wachsens und des Maßes für dieselbe festgestellt haben, entsteht die Frage, welche Form im Allgemeinen eine Function haben muß, wenn bei derselben mit gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen gleiche Unterschiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen verbunden sein sollen, oder in welcher allgemeinen Function alle denkbaren eine gleichförmige Beschleunigung des Wachsens ausdrückenden Functionen als besondere Fälle enthalten sind. Wir wissen, daß die Function $a + bx$ alle Fälle eines gleichmäßigen Wachsens in sich begreift, und zwar deswegen in sich begreift, weil sie, wie §. 18 geschehen, aus der Voraussetzung des gleichmäßigen Wachsens abgeleitet werden kann. Ebenso werden wir die allgemeine alle denkbaren Fälle der gleichförmigen Beschleunigung des Wachsens in sich enthaltende Function finden, wenn wir im

Stande sind, dieselbe aus der Voraussetzung der gleichförmigen Beschleunigung des Wachsens abzuleiten. Diese Voraussetzung schließt in sich, daß die den gleichen beliebig kleinen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen zugehörigen Zunahmen der abhängig Veränderlichen eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung bilden. Wir wollen die willkürlich Veränderliche vom Nullwerth aus wachsend denken, und die der ersten Zunahme derselben entsprechende Zunahme der abhängig Veränderlichen möge A heißen; die nächste Zunahme der abhängig Veränderlichen heiße $A + D$, und es sind mithin die successiven Zunahmen der abhängig Veränderlichen durch die einzelnen Glieder der Reihe

$$A,\ A + D,\ A + 2D,\ A + 3D, \ldots\ldots A + (n-1)D$$

vorgestellt. Den Werth, den die abhängig Veränderliche wachsend erreicht, wird man offenbar erhalten, wenn man die Summe aller successiven Zunahmen der abhängig Veränderlichen nimmt, und den zufälligen Zahlenwerth, den die abhängig Veränderlichen für den Nullwerth der willkürlich Veränderlichen hat, hinzufügt. Man kann sich das Gesagte leicht veranschaulichen durch den Hinblick auf die Coordinaten einer krummen Linie Fig. 54. Auf der Abscissenlinie sind vom Punkt a, als dem Nullpunkt, lauter gleiche Zunahmen ab, bc, u. s. w. gesetzt. Der Werth einer beliebigen Ordinate ek, als der abhängig Veränderlichen, wird augenscheinlich erhalten, wenn man zu der Linie gk, d. h. zu der Summe der Zunahmen gm, hn, io, kp der Ordinate, die Linie fa, d. h. den Werth, den die Ordinate für den Nullwerth der Abscisse hat, hinzufügt. Unsere Absicht ist nun die Summe der durch obige Reihe vorgestellten Zunahmen der abhängig Veränderlichen als Function des Zahlenwerths der willkürlich Veränderlichen darzustellen. Man sieht indessen leicht, daß man die Summe der obigen Reihe, abgesehen von den constanten Größen A und D, zunächst durch die beliebig zu setzende Anzahl der Glieder ausgedrückt erhalten wird, und daß die Summenformel folglich als Function der veränderlichen An-

zahl der Glieder der Reihe, oder, was dasselbe ist, als Function der Anzahl der Zunahmen der willkürlich Veränderlichen erscheinen wird, nicht aber als Function des Zahlenwerthes der willkürlich Veränderlichen. Da man jedoch den Zunahmen der willkürlich Veränderlichen einen bestimmten Zahlenwerth beilegen kann, und in diesem Fall der Uebergang von der Anzahl der Zunahmen der willkürlich Veränderlichen zu dem Zahlenwerth dieser willkürlich Veränderlichen leicht zu finden ist, so ist es auf diesem Wege auch möglich, die Summenformel als Function des Zahlenwerthes der willkürlich Veränderlichen darzustellen. Die obige Reihe habe n Glieder; das letzte Glied derselben ist also $A + (n-1) D$. Die Summe der Reihe ist nach bekannter Regel $= [A + A + (n-1) D] \frac{n}{2}$, oder, nach Potenzen von n geordnet, $= \left(A - \frac{D}{2}\right) n + \frac{D}{2} n^2$. Nehmen wir nun zunächst an, daß die Reihe mit dem Anfangsglied A und der Differenz D entstanden sei, indem man der willkürlich Veränderlichen vom Nullwerth aus Zunahmen vom Zahlenwerth 1 ertheilt hat, so fällt die Zahl n, d. h. die Anzahl der Zunahmen der willkürlich Veränderlichen ohne Weiteres zusammen mit dem ganzen Zahlenwerth, den die willkürlich Veränderliche wachsend erreicht hat. Nennen wir diesen ganzen Zahlenwerth der willkürlich Veränderlichen x, so ist die Summe der Zunahmen der abhängig Veränderlichen durch die Function $\left(A - \frac{D}{2}\right) x + \frac{D}{2} x^2$ von x gegeben.

Es ist leicht zu beweisen, daß, wenn die willkürlich Veränderliche nicht den Werth einer ganzen Zahl, sondern den eines beliebigen Bruches $\frac{n}{m}$ wachsend erreicht hat, die Summe der Zunahmen der abhängig Veränderlichen dennoch durch dieselbe Function des Zahlenwerths der willkürlich Veränderlichen ausgedrückt wird. Der Beweis ist fol-

gender. Die willkürlich Veränderliche wachse vom Nullwerth aus nicht um Zunahmen gleich 1, in welchem Falle die Zunahmen der abhängig Veränderlichen eine Reihe mit dem Anfangsglied A und der Differenz D bildeten, sondern um Zunahmen gleich $\frac{1}{m}$. Die Zunahmen der abhängig Veränderlichen bilden dann eine andere arithmetische Reihe der ersten Ordnung, deren Anfangsglied a und deren Differenz d heißen möge. Die Größen a und d stehen in leicht nachweisbarem Zusammenhang mit A und D. Denn da die Zunahme der willkürlich Veränderlichen jetzt m mal so klein gesetzt ist, so ist, wie im vorhergehenden Paragraphen nachgewiesen, die Differenz d der neuen Reihe m^2 mal so klein als die Differenz D, oder es ist $d = \frac{D}{m^2}$. Was den Zusammenhang von a und A betrifft, so ist klar, daß die Summe der m ersten Glieder der neuen Reihe gleich A ist. Diese Summe ist aber $= [a + a + (m-1)d]\frac{m}{2}$ $= ma + \frac{m(m-1)d}{2}$. Führt man in diese Formel D ein, indem man $\frac{D}{m^2}$ statt d setzt, so erhält man $ma + \frac{m(m-1)D}{2m^2} = A$ und folglich $a = \frac{A}{m} - \frac{(m-1)D}{2m^2}$. Nachdem durch diese Gleichungen der Uebergang von den Größen a und d zu den Größen A und D ermöglicht ist, läßt sich der Beweis leicht zu Ende führen. Nehmen wir nämlich in der Reihe mit dem Anfangsglied a und der Differenz d die n ersten Glieder zusammen, so ist ihre Summe, nach Potenzen von n geordnet, gleich $\left(a - \frac{d}{2}\right)n + \frac{d}{2}n^2$. Zu diesen n Zunahmen der abhängig Veränderlichen gehören n Zunahmen der willkürlich Veränderlichen im Werthe von $\frac{1}{m}$; deren Summe $\frac{n}{m}$ ist der Zahlenwerth, den die will-

kürlich Veränderliche wachsend erreicht hat. Wenn wir nun die dem Zahlenwerth $\frac{n}{m}$ der willkürlich Veränderlichen zugehörige Summe der Zunahmen der abhängig Veränderlichen, welche durch die Formel $\left(a - \frac{b}{2}\right)n + \frac{d}{2}n^2$ gegeben war, als Function der Zahl $\frac{n}{m}$ ausdrücken wollen, so brauchen wir in dieser Summenformel nur das erste Glied durch m und das zweite durch m^2 zu multipliciren und zu dividiren, und erhalten $m\left(a - \frac{d}{2}\right)\frac{n}{m} + \frac{m^2 d}{2} . \left(\frac{n}{m}\right)^2$. Führen wir in diese Formel die Werthe A und D ein, indem wir den obigen Gleichungen gemäß $\frac{D}{m^2}$ statt d und $\frac{A}{m} - \frac{(m-1)D}{2m^2}$ statt a setzen, so erhalten wir

$$m\left[\frac{A}{m} - \frac{(m-1)D}{2m^2} - \frac{D}{2m^2}\right]\frac{n}{m} + \frac{m^2 D}{2m^2} . \left(\frac{n}{m}\right)^2,$$

und nach Zusammenziehung des Coefficienten von $\frac{n}{m}$ die Formel $\left(A - \frac{D}{2}\right)\frac{n}{m} + \frac{D}{2}\left(\frac{n}{m}\right)^2$. Wir sehen also, daß die Function des beliebigen Zahlenwerthes $\frac{n}{m}$ der willkürlich Veränderlichen, durch welche die Summe der Zunahmen der abhängig Veränderlichen ausgedrückt wird, genau dieselbe ist, welche wir für den ganzen Zahlenwerth x der willkürlich Veränderlichen vorher gefunden haben, und es ist demnach allgemein, wenn die willkürlich Veränderliche den beliebigen Zahlenwerth x hat, die Summe der Zunahmen der abhängig Veränderlichen durch die Function $\left(A - \frac{D}{2}\right)x + \frac{D}{2}x^2$ von x gegeben, wobei die Zahlen A und D eine aus dem Früheren bekannte Bedeutung haben.

Da man nun, wie wir oben sahen, den Gesammtwerth der abhängig Veränderlichen erhält, wenn man zu der Summe ihrer Zunahmen noch den zufälligen Werth, den die abhängig Veränderliche für den Nullwerth der willkürlich Veränderlichen hat, hinzufügt, so wird, diesen Werth durch a ausgedrückt, die Function $a + \left(A - \frac{D}{2}\right)x + \frac{D}{2}x^2$ die gesuchte alle denkbaren Fälle einer constanten Beschleunigung oder Retardation des Wachsens oder Abnehmens umfassende allgemeine Function sein. Sehen wir ab von der bestimmten Bedeutung, welche vermöge der obigen Ableitung aus der Reihe der Zunahmen den Zahlen A und D unserer Function beizulegen ist, und beachten blos, daß sie überhaupt constant sind, so können wir alle gleichförmig beschleunigt wachsenden Größen als durch die Function $a + bx + cx^2$ gegeben betrachten.

§. 107.

Folgerungen aus dieser allgemeinen Function.

Es ist leicht zu sehen, daß nicht blos, wie soeben nachgewiesen worden, jede gleichförmig beschleunigt wachsende Größe durch eine Function von der Form $a + bx + cx^2$ sich darstellen läßt, sondern daß auch umgekehrt jede Größe, deren veränderlicher Werth durch eine derartige Function ausgedrückt erscheint, eine gleichförmig beschleunigt wachsende sein muß, oder daß die mit beliebigen gleichen Zunahmen des x verbundenen Zunahmen der Function gleiche Unterschiede zeigen müssen. Denn bilden wir nach dem im Obigen angegebenen Verfahren den Unterschied der Zunahmen der Function, welche mit zwei gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen im Werthe von Δx verbunden sind, so finden wir denselben gleich $2c(\Delta x)^2$, was wir durch die analytische Differenzengleichung $\Delta\Delta(a + bx + cx^2) = 2c(\Delta x)^2$ darstellen können. Da dieser Unterschied der Zunahmen der Function constant ist, so lange Δx constant ist, oder die Zunahmen der willkürlich Veränderlichen

alle gleich groß genommen werden, so stellt die Function $a + bx + cx^2$ immer eine mit constanter Beschleunigung wachsende Größe dar. Schreiben wir die vorliegende Differenzengleichung in der Form $\frac{\varDelta\varDelta(a+bx+cx^2)}{(\varDelta x)^2} = 2c$, so sehen wir, daß das Doppelte des Coefficienten von x^2, als der zweite Differenzquotient der Function, das Maß der constanten Beschleunigung des Wachsens in dem mehrerwähnten Sinne ist, d. h. daß das Doppelte dieses Coefficienten angibt, wie groß die Unterschiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen sind, wenn die willkürlich Veränderliche mehreremal um den Zahlenwerth 1 wächst. Es folgt hieraus, oder es ist vielmehr nur eine andere Ausdrucksweise der letzterwähnten Eigenschaft der Function $a + bx + cx^2$, daß, wenn man dem x mehrere um 1 verschiedene Werthe beilegt, die dadurch entstehenden successiven Werthe der Function eine Reihe bilden, in welcher die Unterschiede der Unterschiede der Glieder der Reihe constant und gleich $2c$ sind. Setzen wir, um dies durch ein Zahlenbeispiel zu erläutern, $a = 3$, $b = -1$, $c = 2$, wodurch die unbestimmte Function $a + bx + cx^2$ in die bestimmte $3 - x + 2x^2$ übergeht, so sind, wenn wir dem x der Reihe nach die Zahlenwerthe 1, 2, 3, 4, 5 beilegen, die zugehörigen Zahlenwerthe der bestimmten Function 4, 9, 18, 31, 48. Ziehen wir jeden dieser Werthe der Function von dem nachfolgenden ab, so erhalten wir in den Zahlen 5, 9, 13, 17 die successiven Zunahmen der Function. Die Unterschiede dieser Zunahmen sind constant und gleich 4, und also gleich dem Doppelten des für x^2 angenommenen Coefficienten. Alles dies über die Function $a + bx + cx^2$ bisher Gesagte könnte auch aus der Zurückbeziehung derselben auf ihre den Zusammenhang mit der arithmetischen Reihe der Zunahmen ausdrückende Form $a + \left(A - \frac{D}{2}\right)x + \frac{D}{2}x^2$ sehr leicht hergeleitet werden.

Da der Ausdruck für die Beschleunigung des Wach-

sens der Function $a + bx + cx^2$ nur von dem Coefficienten von x^2 abhängt, so folgt erstens, daß die Coefficienten a und b sowol jeder einzeln, als auch beide zugleich gleich Null sein können, und dennoch eine gleichförmig beschleunigt wachsende Größe durch die Function gegeben ist. Wäre c gleich Null, so stellt die übrigbleibende Function $a + bx$ gleichmäßig wachsende Größen vor, welche ja eben jede Beschleunigung des Wachsens ausschließen. Es folgt ferner, daß aus dem Coefficient c beurtheilt werden kann, welche von den beiden oben bezeichneten Hauptarten der Veränderung der Stärke des Wachsens stattfindet. Ist nämlich c positiv, so entsteht jede folgende Zunahme der abhängig Veränderlichen aus der vorhergehenden durch Hinzufügen einer positiven Zahl. Wenn nun die abhängig Veränderliche im Abnehmen begriffen ist, oder ihre Zunahmen negativ sind, so werden sie durch den Zusatz einer positiven Zahl kleiner, und man hat eine Retardation des Abnehmens, und wenn die abhängig Veränderliche im Wachsen begriffen ist, so werden ihre positiven Zunahmen immer größer, und man hat eine Beschleunigung des Wachsens. Ein positives c begreift also die beiden Fälle, eine Retardation des Abnehmens und eine Beschleunigung des Wachsens in sich, welche wir mit gemeinschaftlichem Namen Beschleunigung des Wachsens genannt haben. Ist c negativ, und entsteht also jede folgende Zunahme aus der vorhergehenden durch Hinzufügen einer negativen Zahl, so werden, wenn die abhängig Veränderliche im Wachsen begriffen ist, ihre Zunahmen immer kleiner, und man hat eine Retardation des Wachsens, und wenn sie im Abnehmen begriffen ist, so werden die Abnahmen immer größer, und man hat eine Beschleunigung des Abnehmens, und mithin begreift ein negatives c die beiden Fälle, eine Retardation des Wachsens und eine Beschleunigung des Abnehmens in sich, welche wir mit gemeinschaftlichem Namen eine Retardation des Wachsens genannt haben. Ob nun innerhalb gewisser Grenzen des Werthes von x von den

beiden unter einem positiven oder negativen c begriffenen Fällen der eine oder der andere statthat, d. h. ob die abhängig Veränderliche im Wachsen oder Abnehmen ist, das läßt sich bekanntlich nur aus dem ersten Differentialquotient der abhängig Veränderlichen beurtheilen, welcher, je nachdem er positiv oder negativ ist, ein Wachsen oder Abnehmen derselben anzeigt. Der Differentialquotient der Function $a + bx + cx^2$ ist $b + 2cx$. Derselbe ist bei beliebigen Werthen von b und c für einen gewissen einzelnen Werth von x gleich Null. Für alle vor diesem einzelnen Werth liegenden Werthe von x ist er negativ und für alle nachfolgenden positiv oder umgekehrt. Aus dem Differentialquotient $b + 2cx$ läßt sich mithin leicht beurtheilen, bis zu welcher Grenze des Werthes von x eine Retardation des Abnehmens, und darüber hinaus eine Beschleunigung des Wachsens stattfindet bei positivem c, oder eine Retardation des Wachsens und eine Beschleunigung des Abnehmens bei negativem c. Ob also die Unterschiede der Zunahmen einer gleichförmig beschleunigt wachsenden Größe positiv oder negativ sind, das hängt von c allein ab, ob die Zunahmen positiv oder negativ sind, das hängt außer x von c und b ab, und ob endlich die Größe selbst positiv oder negativ ist, das hängt natürlich außer x von c, b und a zugleich ab.

§. 108.

Construction der gleichförmig beschleunigt wachsenden Größen.

Vermöge der für alle gleichförmig beschleunigt wachsenden Größen aufgefundenen Function können leicht die Bedingungen angegeben werden, unter welchen besondere, ihrer Art nach bestimmte veränderliche Größen eine constante Beschleunigung des Wachsens zeigen. In sofern man mit geometrischen Größen zu thun hat, nennen wir die Bestimmung derjenigen Figur, in welcher gewisse räumliche Elemente eine gleichförmige Beschleunigung des Wachsens haben, die Construction der gleichförmig beschleunigt wach-

senden Größen. So wie man z. B. weiß, daß nur die Parallelcoordinaten einer graden Linie eine constante Stärke des Wachsens haben, so kann man auch fragen, in welcher Figur haben die Parallelcoordinaten eine constante Beschleunigung des Wachsens. Die Antwort darauf ist, in derjenigen Figur, in welcher die Coordinate durch die Function $a + bx + cx^2$ der Abscisse x gegeben ist, oder welche durch die Gleichung $y = a + bx + cx^2$ dargestellt wird. Nun ist aus der analytischen Geometrie bekannt, oder wir wollen wenigstens hier als bekannt voraussetzen, daß durch diese Gleichung bei allen beliebigen Zahlenwerthen der Buchstaben a, b und c immer die gemeine Parabel ausgedrückt wird, und zwar für eine solche Lage der Coordinatenaxen, daß die Ordinaten mit der Hauptaxe der Parabel parallel laufen. Wir sehen also, daß nur in einer einzigen Linie, nämlich in der gemeinen Parabel, und zwar nur in dem Fall, als ihre Ordinaten mit der Hauptaxe parallel sind, die Parallelcoordinaten eine constante Beschleunigung des Wachsens zeigen können. Beschränken wir uns auf rechtwinklige Coordinaten, so geben die Figuren 50 und 51, welche im Eingang als Beispiele einer constanten Beschleunigung oder Retardation des Wachsens der Parallelordinaten gebraucht worden sind, die einzig möglichen beiden Lagen an, in welchen eine solche Beschleunigung der senkrechten Parallelcoordinaten stattfinden kann. Was das Maß dieser constanten Beschleunigung betrifft, so kann dasselbe natürlich in verschiedenen Parabeln in allen Graden der Größe vorhanden sein, und es fragt sich, von welchem Element der Parabel es abhängt. Aus der analytischen Geometrie weiß man, daß in der Gleichung $y = a + bx + cx^2$ der Parabel bei rechtwinkligen Coordinaten die Zahl c so mit dem Parameter p der Parabel zusammenhängt, daß $c = \frac{1}{p}$ ist. Wir sehen daraus, daß das Maß der Beschleunigung des Wachsens der Ordinaten, da es von c allein abhängt, im umgekehrten Ver-

hältniß zum Parameter steht, oder daß je größer die Zahl ist, welche den Parameter ausdrückt, desto kleiner die Zahl ist, welche den Unterschied der Zunahmen der Ordinaten ausdrückt bei gleichen Zunahmen der Abscisse.

Um ein zweites Beispiel zu geben, so nehmen wir an, man wollte wissen, in welcher Figur der zwischen den senkrechten Parallelcoordinaten enthaltene Flächenraum eine constante Beschleunigung des Wachsens zeigt bezüglich der Abscisse als der willkürlich Veränderlichen. Alsdann muß $a + bx + cx^2$ diejenige Function der Abscisse x sein, durch welche die Fläche der Figur ausgedrückt wird. Da man nun weiß (§. 49), daß die die Ordinate einer Figur darstellende Function der Abscisse erhalten wird, wenn man den Differentialquotient derjenigen Function der Abscisse nimmt, welche die Fläche der Figur angibt, so stellt die Function $b + 2cx$, als der Differentialquotient der Function $a + bx + cx^2$, die Ordinate der gesuchten Figur dar. Nun ist aber $b + 2cx$ die Ordinate einer geraden Linie, und folglich kann eine constante Beschleunigung des Wachsens der Flächen nur dargestellt werden durch Flächenräume, welche durch das Fortrücken der veränderlichen Ordinate einer geraden Linie beschrieben werden, wie die früher als Beispiele gebrauchten Flächenräume in Figur 52 und 53. Da das Maß der Beschleunigung des Wachsens der durch $a + bx + cx^2$ ausgedrückten Fläche nur von der Zahl c abhängt, und für die gerade Linie, deren Ordinate $b + 2cx$ ist, durch c nur ihre Neigung gegen die Abscisse vorgeschrieben ist, so sieht man, daß die Beschleunigung des Wachsens der Fläche gar nicht von der Größe der Ordinate, durch deren Fortrücken die Fläche beschrieben wird, abhängt, sondern nur von der Neigung, welche die gerade Linie gegen ihre Abscisse hat. Von der Größe der Ordinate, und von dieser allein, hängt bekanntlich die Stärke des Wachsens der Fläche ab.

Um noch ein drittes Beispiel zu geben, so fragen wir, welche durch Polarcoordinaten beschriebene krumme Linie hat die Eigenschaft, daß mit gleichen Zunahmen des Abscis-

senkreises solche Zunahmen des vom Radiusvecter beschriebenen Flächenraums verbunden sind, die immer um gleichviel größer oder kleiner werden. Für eine Abscisse x ist also die Fläche durch die Function $a+bx+cx^2$ ausgedrückt. Nun weiß man (s. §. 51), daß bei Polarcoordinaten der Differentialquotient derjenigen Function der Abscisse, welche die Fläche ausdrückt, gleich ist dem halben Quadrat der die Ordinate darstellenden Function. Es wird also, wenn wir unter u die unbekannte die Ordinate ausdrückende Function vorstellen, der Differentialquotient von $a+bx+cx^2$, d. h. $b+2cx=\frac{u^2}{2}$ sein, und folglich ist $u=\sqrt{2b+4cx}$ die Gleichung der gesuchten Linie. Eine dieser Gleichung entsprechende Linie ist, in sofern man nur die Art ihres Verlaufs im Allgemeinen im Auge hat, durch die Figur 55 dargestellt. Aus diesen wenigen Beispielen wird es hinreichend klar sein, daß es gar keine Schwierigkeit hat, für alle Arten von räumlichen Elementen diejenige Figur zu finden, in welcher die abhängig Veränderliche eine constante Beschleunigung des Wachsens hat, und daß der Construction aller beliebigen gleichförmig beschleunigt wachsenden Größen nichts im Wege steht.

Zum Schluß dieser Lehre von den gleichförmig beschleunigt wachsenden Größen bemerken wir noch, daß man diese Lehre auch auf folgendem Wege darstellen konnte. Man hätte, wenn eine veränderliche Stärke des Wachsens vorausgesetzt ist, als den einfachsten denkbaren Fall dieser Veränderung den angenommen, in welchem mit gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen gleich große Veränderungen der Stärke des Wachsens verbunden sind, so daß die willkürlich Veränderliche und die Stärke des Wachsens der beiden Veränderlichen, d. h. ihr Differentialquotient, gleichmäßig wachsende Größen sind. Hätte man nun die unbekannte Function von x, welche in diesem Falle die abhängig Veränderliche ausdrückt, durch y vorgestellt, so würde man, da der Differentialquotient dieser Function mit

x gleichmäßig wachsend angenommen ist, die Gleichung $\frac{dy}{dx} = a + bx$, und aus derselben durch Integration, und nach Zufügung einer unbestimmten Constanten c, die Gleichung $y = c + ax + \frac{b}{2} x^2$ erhalten haben. Aus dieser allgemeinen für die abhängig Veränderliche gefundenen Function hätte man dann die Sätze, daß die mit gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen verbundenen Zunahmen der abhängig Veränderlichen gleiche Unterschiede haben, daß die Unterschiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen im quadratischen Verhältniß der Zunahmen der willkürlich Veränderlichen wachsen, daß man eine Beschleunigung und Retardation des Wachsens und Abnehmens zu unterscheiden habe, und überhaupt alles über die gleichförmig beschleunigt wachsenden Größen Gesagte in ziemlicher Kürze herleiten könne. Diejenigen, deren Ansprüche an die Methode schon befriedigt sind bei willkürlich vorgenommenen und ganz unmotivirten Combinationen und Umformungen von Formeln, deren Zweck und Bedeutung erst ersichtlich wird, wenn man am Resultat angelangt ist, und denen mit Formeln zu würfeln ein ebenso methodisches und wissenschaftliches Verfahren dünkt, als auf einem durch die Natur der Aufgabe überall vorgeschriebenen Weg begrifflicher Entwickelung vorzuschreiten, oder diejenigen, welche Ueberraschungen lieben, und eine Ehre suchen in den Künsten einer solchen Beweisart, die man elegant zu nennen pflegt, oder diejenigen endlich, denen der kürzeste Weg auch schlechtweg der beste ist, weil es ihnen nur auf die Menge der Resultate ankommt, und weil ihnen Wissenschaft nichts weiter ist als eine Sammlung von bewiesenen Sätzen, alle diese werden natürlich dem letzteren Weg unbedingt den Vorzug geben.

§. 109.

Ungleichförmige Beschleunigung des Wachsens.

Nachdem wir unsere Begriffe über gleichförmige Beschleunigung des Wachsens, über Eigenschaften und Arten sowie über Maßbestimmung derselben festgestellt haben, können wir zur Untersuchung und näheren Bestimmung der Veränderung der Stärke des Wachsens schreiten in den Fällen, in welchen diese Veränderung nicht mehr constant ist. Jede abhängig veränderliche Größe, deren fließender Zahlenwerth nicht durch eine Function der willkürlich Veränderlichen x von der Form $a + bx + cx^2$ ausgedrückt ist, wird nothwendig eine ungleichförmige Beschleunigung des Wachsens zeigen, weil, wie schon nachgewiesen, aus der Voraussetzung einer constanten Beschleunigung des Wachsens immer die Function $a + bx + cx^2$ als Werth der abhängig Veränderlichen folgt. Ist die abhängig Veränderliche durch eine von der Form $a + bx + cx^2$ abweichende Function ausgedrückt, so kann dieselbe auch nicht in der kleinsten denkbaren Strecke dieselbe unveränderte Beschleunigung des Wachsens zeigen. Denn wären für eine beliebig kleine Strecke mit gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen gleiche Unterschiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen verbunden, so würden für beliebige innerhalb dieser Strecke gesetzte Veränderungen des x die Werthe der abhängig Veränderlichen richtig berechnet werden durch eine Function von der Form $a + bx + cx^2$, was der Voraussetzung, daß der Werth der abhängig Veränderlichen überall durch eine andere Function gegeben sein soll, widerspricht. Wenn nun die Beschleunigung des Wachsens auch nicht innerhalb der kleinsten angebbaren Strecke unverändert dieselbe bleiben kann, eine Beschleunigung des Wachsens aber doch jedenfalls vorhanden sein muß, sobald die Größen nicht gleichmäßig wachsend sind, so folgt, daß jede vorhandene bestimmte Größe der Beschleunigung keine Ausbreitung gewinnt über einen einzelnen Verflußpunkt

der willkürlich Veränderlichen hinaus, sondern rein momentan vorhanden ist, und daß die Beschleunigung des Wachsens stetig veränderlich ist.

Alles, was in dem ersten Theil unserer Wissenschaft von der Art und den Bedingungen des Vorhandenseins eines momentanen Zustandes und von der stetigen Veränderung gesagt worden ist, findet ohne Weiteres hier seine Anwendung, und unter durchgehender Voraussetzung der dort entwickelten Begriffszusammenhänge werden die Schlüsse, denen früher eine ausführlichere Begründung vorausgeschickt werden mußte, jetzt in der Kürze bündig aneinandergereiht werden können. Als Bedingung der Möglichkeit und Denkbarkeit eines momentanen Zustandes ist aufgestellt worden, daß derselbe nur als Verflußpunkt innerhalb einer stetigen Veränderung statthaben kann, wobei in dem Begriff des Stetigen dies zu urgiren ist, daß in demselben nach jedem Uebergang von einem Größenzustand zu einem andern die ganze Unendlichkeit aller denkbaren Zwischenstufen *factisch* durchlaufen worden ist. Bezogen auf die stetig veränderliche Beschleunigung des Wachsens wird daraus folgen, daß je kleiner man den Spielraum der Veränderung der willkürlich Veränderlichen setzt, desto geringer auch die innerhalb dieses Spielraums stattfindende Veränderung der Beschleunigung des Wachsens zu denken ist, und desto unbedeutender auch der Fehler wird, welcher daraus entsteht, daß man die Beschleunigung des Wachsens innerhalb dieses kleinen Spielraums constant annimmt. Nun kommt bei constanter Beschleunigung des Wachsens auf die Größe des Spielraums, innerhalb dessen man die willkürlich Veränderliche wachsend denkt, gar nichts an, vielmehr ist die Größe einer constanten Beschleunigung des Wachsens völlig bestimmt, wenn man nur den für zwei beliebig kleine gleiche Zunahmen der willkürlich Veränderlichen stattfindenden Unterschied der Zunahmen der abhängig Veränderlichen kennt, indem dieser Unterschied dividirt durch das Quadrat der Zunahme der willkürlich Veränderlichen

das constante Maß der Beschleunigung liefert. Setzt man mithin in einer Function von x mit veränderlicher Beschleunigung des Wachsens zwei gleiche kleine Zunahmen Δx der willkürlich Veränderlichen, und dividirt den Unterschied der zugehörigen Zunahmen der abhängig Veränderlichen durch das Quadrat der Zahl Δx, so wird, wenn man von der innerhalb der beiden Zunahmen Δx stattfindenden geringen Veränderung der Beschleunigung des Wachsens absieht, und den gebildeten zweiten Differenzquotient als Maß einer constanten Beschleunigung des Wachsens gelten läßt, der aus dieser Annahme erwachsende Fehler um so geringer sein, je kleiner die Zahl Δx genommen wird, und man wird sich der wahren Größe der momentanen Beschleunigung des Wachsens, welche für denjenigen Werth des x, von welchem aus die Zunahmen Δx gesetzt sind, stattfindet, durch fortgesetzte Verkleinerung des Δx so annähern können, daß es keine feste Grenze dieser Annäherung gibt, oder daß der übrigbleibende Fehler jede beliebig kleine vorgeschriebene Zahl überschreitet. Indessen wird, so lange Δx noch irgend einen angebbaren Zahlenwerth behält, der aus dem zweiten Differenzquotienten entnommene Werth der Beschleunigung des Wachsens niemals vollkommen richtig sein, sondern er wird entweder immer zu groß ausfallen, wenn die Beschleunigung des Wachsens im Zunehmen begriffen ist, und die Unterschiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen immer größer werden, oder er wird immer zu klein ausfallen, wenn die Beschleunigung des Wachsens im Abnehmen begriffen ist.

§. 110.

Berechnung der momentanen Beschleunigung des Wachsens.

Aus dem Vorhergehenden ist klar, daß man, um aus dem zweiten Differenzquotienten einer Function von x den wahren Werth der momentanen Beschleunigung des Wachsens zu erhalten, die Zunahmen Δx nicht blos sehr stark, sondern ins Endlose verkleinern, d. h. sie annulliren

müßte. Und obgleich mit den Zunahmen der willkürlich Veränderlichen auch jede Zunahme der abhängig Veränderlichen, sowie der Unterschied solcher Zunahmen und überhaupt Alles, worauf die Vorstellung einer Beschleunigung des Wachsens sich gründen kann, verschwindet, so bildet doch dieser Umstand nach dem, was in dem ersten Theil über dasselbe Verhalten der veränderlichen Stärke des Wachsens gesagt worden ist, für uns keine Schwierigkeit mehr dar. Vielmehr wird daraus, daß der zweite Differenzquotient einer Function von x durch fortgesetzte Verkleinerung des Δx eine Annäherung ohne Grenze gestattet an den wahren Werth der momentanen Beschleunigung des Wachsens, und daraus, daß dieser zweite Differenzquotient sich einem festen Grenzwerth ohne Ende nähert, in welchen er mit Annullirung des Δx übergeht, folgen, daß dieser Grenzwerth zugleich die wahre Größe der momentanen Beschleunigung des Wachsens angibt. Die wirkliche Berechnung einer momentanen Beschleunigung des Wachsens bei gegebener Function von x hat demnach nicht die geringste Schwierigkeit. Will man, um sich die Sache erst im Einzelnen zu erläutern, die momentane Beschleunigung des Wachsens nur für einen bestimmten einzelnen Zahlenwerth der willkürlich Veränderlichen berechnen, so hat man nur für diesen bestimmten Zahlenwerth des x und eine unbestimmte durch Δx ausgedrückte Zunahme desselben den zweiten Differenzquotient aufzustellen, und zu sehen, in welchen bestimmten Zahlenwerth derselbe mit Annullirung des Δx übergeht, oder will man, worauf es natürlich in der Regel ankommt, einen allgemeinen für jeden beliebigen Werth x der willkürlich Veränderlichen geltenden Ausdruck, d. h. eine Function von x haben, welche die momentane Beschleunigung des Wachsens allgemein angibt, so braucht man nur den zweiten Differenzquotient für ein unbestimmt gelassenes x und ein unbestimmtes Δx aufzustellen, und zu sehen, in welche Function von x derselbe mit Annullirung des Δx übergeht.

Soll die Bedeutung, welche der Grenzwerth des zweiten Differenzquotienten für das Wachsen der beiden Veränderlichen hat, ausgesprochen werden, so ist klar, daß der Zahlenwerth, in welchen derselbe für ein bestimmtes x übergeht, in dem Sinne zu nehmen ist, in welchem überhaupt eine bestimmte Zahl eine Beschleunigung des Wachsens ausdrücken kann, nämlich als Ausdruck einer constanten Beschleunigung des Wachsens. Da nun bei constanter Beschleunigung des Wachsens der zweite Differenzquotient angibt, wie groß die Unterschiede der abhängig Veränderlichen sind, wenn die willkürlich Veränderliche mehrere mal um die Zahl 1 wächst, so wird, wenn bei veränderlicher Beschleunigung des Wachsens der Grenzwerth des zweiten Differenzquotienten bei bestimmtem x gleich der Zahl a gefunden wird, dies heißen: Die momentane Beschleunigung des Wachsens ist bei diesem bestimmten Werth des x so groß, daß, wenn sie unverändert bliebe oder zur Ausführung käme, die mit gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen im Werthe von 1 verbundenen Zunahmen der abhängig Veränderlichen den Unterschied a zeigen würden.

Wir wollen das Vorhergehende durch das Beispiel einer bestimmten Function erläutern. Die Function sei $\frac{1}{4}x^3$. Geben wir der willkürlich Veränderlichen die drei Werthe x, $x + \Delta x$ und $x + 2\Delta x$, so sind die drei zugehörigen Werthe der Function $\frac{1}{4}x^3$, $\frac{1}{4}(x + \Delta x)^3$ und $\frac{1}{4}(x + 2\Delta x)^3$, oder nach Ausführung der vorgeschriebenen Potenzirungen, $\frac{1}{4}x^3$, $\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2\Delta x + \frac{3}{4}x(\Delta x)^2 + \frac{1}{4}(\Delta x)^3$, und $\frac{1}{4}x^3 + \frac{6}{4}x^2\Delta x + \frac{12}{4}x(\Delta x)^2 + \frac{8}{4}(\Delta x)^3$. Ziehen wir den ersten Werth der Function von dem zweiten, und den zweiten von dem dritten ab, so erhalten wir die Reste $\frac{3}{4}x^2\Delta x + \frac{3}{4}x(\Delta x)^2 + \frac{1}{4}(\Delta x)^3$ und $\frac{3}{4}x^2\Delta x$

$+\frac{9}{4}x(\Delta x)^2+\frac{7}{4}(\Delta x)^3$, und in denselben die beiden Zunahmen der Function, die mit den zwei gleichen Zunahmen Δx verbunden sind. Der Unterschied dieser Zunahmen ist $\frac{3}{2}x(\Delta x)^2+\frac{3}{2}(\Delta x)^3$. Wird derselbe durch $(\Delta x)^2$ dividirt, so stellt der Ausdruck $\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}\Delta x$ den zweiten Differenzquotient der Function $\frac{1}{4}x^3$ dar, was wir durch die analytische Gleichung $\frac{\Delta\Delta\frac{1}{4}x^3}{(\Delta x)^2}=\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}\Delta x$ ausdrücken können. Der Grenzwerth dieses zweiten Differenzquotienten für ein endlos verkleinertes Δx ist $\frac{3}{2}x$, und durch diese Function ist allgemein die momentane Beschleunigung des Wachsens der Veränderlichen $\frac{1}{4}x^3$ dargestellt. An der Stelle z. B., wo x den Zahlenwerth 1 hat, ist die momentane Beschleunigung des Wachsens gleich $\frac{3}{2}$, d. h. sie ist so groß als eine constante Beschleunigung, in welcher jede folgende Zunahme der abhängig Veränderlichen um $\frac{3}{2}$ größer ist als die vorhergehende, wenn die willkürlich Veränderliche mehrmals um die Zahl 1 wächst. Hat x den Werth -1, so nimmt die Function $\frac{3}{2}x$ den Werth $-\frac{3}{2}$ an, und ein solcher negativer zweiter Differenzquotient bedeutet dem Obigen (§. 104) zu Folge, daß die Zunahmen der abhängig Veränderlichen immer um $\frac{3}{2}$ kleiner, oder die Abnahmen, d. h. die negativen Zunahmen um $\frac{3}{2}$ größer werden, wenn die willkür-

lich Veränderliche mehrmals um die Zahl 1 wächst. Da übrigens der erste Differentialquotient der Function $\frac{1}{4}x^3$ gleich $\frac{3}{4}x^2$ ist, und derselbe für alle Werthe von x einen positiven Werth hat, so sind die Zunahmen der Function $\frac{1}{4}x^3$ für alle Werthe von x positiv, oder die Function ist immer im Wachsen begriffen. Der Grenzwerth des zweiten Differenzquotienten dieser Function wird also, je nachdem er negativ oder positiv ist, nur eine Retardation des Wachsens oder eine Beschleunigung des Wachsens andeuten. Wollte man sich den Fluß der Werthe der Function $\frac{1}{4}x^3$ versinnlichen etwa durch die Parallelcoordinaten einer Curve, so sei ab (Fig. 56) die Abscisse x, c der Nullpunkt derselben und die Länge cd gleich + 1. Alsdann stellen die Ordinaten der Curve fgchi die successiven Werthe der Function dar. Die Ordinaten dieser Curve verändern sich überall nur durch Zusatz von positiven Theilen, indem die negativen Ordinaten immer kleiner und die positiven immer größer werden. Die Zunahmen sind also durchaus positiv, und werden für alle negativen Werthe von x, d. h. für alle zwischen a und c fallenden Punkte immer kleiner, und es findet innerhalb dieses Spielraumes eine Retardation des Wachsens statt, für alle innerhalb c und b fallenden positiven Werthe von x hingegen werden die Zunahmen immer größer, und es findet also eine Beschleunigung des Wachsens statt.

§. 111.

Bezeichnung des Grenzwerthes des zweiten Differenzquotienten.

Für den Grenzwerth des zweiten Differenzquotienten bedürfen wir einer besonderen Bezeichnung, theils um durch eine Gleichung auszudrücken, daß eine bestimmte Function der Grenzwerth des zweiten Differenzquotienten einer andern

bestimmten Function ist, wie in den zur Aufstellung von Differentiationsregeln dienenden analytischen Differentialgleichungen, oder daß eine gegebene Function als der Grenzwerth des zweiten Differenzquotienten einer unbekannten Function betrachtet werden soll, theils um anzudeuten, daß man sich überhaupt nur den Grenzwerth des zweiten Differenzquotienten einer unbestimmten Function denken soll. Man könnte dies nun, wie es auch in andern Fällen bei Grenzwerthen von Functionen üblich ist, durch Vorsetzung des Wortes Limes bezeichnen, und z. B. aus der oben gefundenen analytischen Differenzengleichung $\frac{\Delta\Delta\frac{1}{4}x^3}{(\Delta x)^2} = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}\Delta x$ die analytische Gleichung $\text{Lim}\,\frac{\Delta\Delta\frac{1}{4}x^3}{(\Delta x)^2} = \frac{3}{2}x$ bilden, und ebenso bei einer unbekannten oder unbestimmten durch y ausgedrückten Function den Grenzwerth ihres zweiten Differenzquotienten durch $\text{Lim}\frac{\Delta\Delta y}{(\Delta x)^2}$ bezeichnen. Man hat aber vorgezogen, die für den Grenzwerth des ersten Differenzquotienten eingeführte Bezeichnung auch auf die folgenden Differenzquotienten auszudehnen. Und so wie man beim ersten Differenzquotienten statt $\text{Lim}\,\frac{\Delta y}{\Delta x}$ die Form $\frac{dy}{dx}$ setzt, so auch hier statt $\text{Lim}\,\frac{\Delta\Delta y}{(\Delta x)^2}$ die Form $\frac{ddy}{(dx)^2}$, welche man aus Gründen, die oben (§. 102) schon angegeben sind, in die Form $\frac{d^2y}{dx^2}$ umändert. Die vorstehende analytische Grenzgleichung für die Function $\frac{1}{4}x^3$ würde demnach zu schreiben sein $\frac{d^2\frac{1}{4}x^3}{dx^2} = \frac{3}{2}x$. Entsprechend dieser Bezeichnung

hat man auch die für den Grenzwerth des ersten Differenzquotienten eingeführte Benennung auf den zweiten übertragen, und nennt den Grenzwerth des zweiten Differenzquotienten den zweiten Differentialquotient.

Hier zeigt sich nun, daß die Bezeichnung $\frac{ddy}{dx^2}$ des zweiten Differentialquotienten keine so willkürliche und inhaltleere ist, wie es oben (§. 102) scheinen mochte, indem dieselbe, abgesehen davon, daß sie durch die Entstehung des zweiten Differentialquotienten aus dem zweiten Differenzquotienten $\frac{\Delta\Delta y}{(\Delta x)^2}$ fast von selbst gegeben ist, mit derjenigen Bedeutung des zweiten Differentialquotienten, vermöge welcher er eine Beschleunigung des Wachsens der Größen y und x angibt, auf das innigste verknüpft ist. Denn die beiden d im Zähler zeigen an, daß es auf die Zunahme der Zunahme oder auf den Unterschied der Zunahmen der abhängig Veränderlichen ankommt bei Bestimmung der Beschleunigung des Wachsens, und das Quadrat von dx im Nenner zeigt an, daß der Unterschied der Zunahmen nur in sofern ein bestimmtes Maß der Beschleunigung des Wachsens abgeben kann, als er mit dem Quadrat der Zunahme der willkürlich Veränderlichen verglichen wird.

Die Bezeichnung $\frac{d^2y}{dx^2}$ hat auch den Vortheil, daß sie nicht, wie die Bezeichnung $f''(x)$ des zweiten Differentialquotienten einer Function $f(x)$ ein untrennbares Zeichen ist, sondern daß man Zähler und Nenner in derselben trennen, und mit beiden als mit beliebigen Zahlen rechnen kann, in ähnlicher Weise, wie beim ersten Differentialquotienten die isolirten Differentiale als beliebige Zahlen behandelt werden. In Bezug auf Zunahmen der Größen x und y hat freilich der Werth der Function, welche dem Ausdruck $\frac{d^2y}{dx^2}$ gleichgesetzt wird, nur eine durch Annäherung auszusprechende Bedeutung, indem man nur sagen

kann, je kleiner die Zunahmen dx von x genommen werden, desto näher trifft der Unterschied der Zunahmen von y dividirt durch das Quadrat von dx mit dem Werth des zweiten Differentialquotienten zusammen. Für alle von Null verschiedene Werthe des dx ist dieser Quotient nur der zweite Differenzquotient, und für ein annullirtes dx und folglich auch annullirtes d^2y wird die Rechnung mit Nullen eine unhaltbare und durch keine künstlichen Drehungen zu rechtfertigende Vorstellung. Aber man braucht sich nur die Bedeutung der durch $\frac{d^2y}{dx^2}$ ausgedrückten Function von x zu vergegenwärtigen, um sich zu überzeugen, daß es gestattet ist, unter dx und d^2y endliche Zahlen zu denken. Denn die Function $\frac{d^2y}{dx^2}$ von x bezeichnet für jeden einzelnen Werth des x eine bestimmte Beschleunigung des Wachsens, welche ihrer Größe nach nicht anders gedacht und ausgesprochen werden kann als durch die bestimmenden Elemente einer constanten Beschleunigung. Wird also die Form $\frac{d^2y}{dx^2}$ als Ausdruck einer constanten Beschleunigung des Wachsens genommen, so wird, wenn man unter dx eine beliebige Zahl denkt, unter d^2y zu denken sein der Unterschied, den die mit den Zunahmen dx verbundenen Zunahmen der abhängig Veränderlichen haben würden, wenn die Beschleunigung des Wachsens unverändert bliebe, d. h. d^2y stellt den Unterschied der Zunahmen einer Größe vor, in welcher diejenige Beschleunigung des Wachsens constant ist, welche für y nur momentan vorhanden ist, und welche Größe für jeden andern Werth von x auch eine andere ist. Es verhält sich hier Alles so wie bei den als selbständige Größen behandelten ersten Differentialen. Denn wenn z. B. x und y Parallelcoordinaten eine krumme Linie bedeuten, so ist, wenn man an einen Curvenpunkt eine Tangente zieht, die Zunahme der Ordinate der Tangente dividirt durch die zugehörige Zunahme der Abscisse gleich dem

Werth, den die Function $\frac{dy}{dx}$ für diesen Curvenpunkt hat. Was hindert mich also, dx und dy als zusammengehörige Zunahmen der Coordinaten der jedesmaligen Tangente und als endliche Zahlen zu betrachten; und folglich dy als die Zunahme einer Größe, in welcher diejenige Stärke des Wachsens constant ist, welche für y selbst nur momentan vorhanden ist. Und dasselbe war es, was über die Bedeutung von d^2y gesagt ist, in sofern es als selbständige Größe und als endliche Zahl betrachtet werden soll. Wenn man nun aus einer Differentialgleichung $\frac{d^2y}{dx^2} = 3x^2$ durch Multiplication mit dx^2 die Gleichung $d^2y = 3x^2dx^2$ mit isolirten Differentialen bildet, so nennt man d^2y das zweite Differential der Function y, und überhaupt den mit dx^2 multiplicirten zweiten Differentialquotient einer Function von x das zweite Differential dieser Function. Das isolirte zweite Differential einer abhängig Veränderlichen ist also bei bestimmtem übrigens beliebigem Werthe von dx eine nur von x abhängige endliche Größe, oder eine Function von x, und hat mit dem Unendlichkleinen, durch welches nur unsichere und nebulose Vorstellungen hineingebracht werden, gar nichts zu schaffen; vielmehr läßt sich sein Werth sehr bestimmt und handgreiflich aussprechen, wenn man sagt: So groß als der mit dem Quadrat der beliebigen Zahl dx multiplicirte zweite Differentialquotient ist, so groß würden die Unterschiede der mit den Zunahmen dx verbundenen Zunahmen der abhängig Veränderlichen sein, wenn die vorhandene momentane Beschleunigung des Wachsens unverändert bliebe. Man könnte auch, wie es beim Aussprechen einer Beschleunigung des Wachsens durchaus geschieht, dem dx immer den Zahlenwerth 1 beilegen, und dann würde das zweite Differential einer abhängig Veränderlichen schlechtweg dem zweiten Differentialquotient derselben gleich sein, und die obige Gleichung geschrieben werden $d^2y = 3x^2$. Es würde dadurch an der ganzen Sache

nichts geändert. Indem man aber $d^2y = 3x^2dx^2$ schreibt, erhält man dem d^2y seine für jeden Werth von dx geltende Allgemeinheit, weil bei jeder constanten Beschleunigung des Wachsens die Zunahme der abhängig Veränderlichen im quadratischen Verhältniß der Zunahme der willkürlich Veränderlichen zu- und abnimmt.

§. 112.

Herleitung des zweiten Differentialquotienten einer Function.

Das operative Verfahren, welches bisher zur Herleitung und Darstellung des zweiten Differentialquotienten einer Function angewendet worden ist, und darin bestand, den zweiten Differenzquotienten dieser Function aufzustellen, und in demselben durch Annullirung des Δx zum Grenzwerth überzugehen, ist allerdings durch den Zweck dieser Operation, die Beschleunigung des Wachsens zu finden, als das nächste und natürlichste gegeben, und schließt sich der Bedeutung des zweiten Differentialquotienten am einfachsten an. Indessen würde es, wie leicht zu sehen, mühsam und weitläufig sein, auf diesem Wege den zweiten Differentialquotient beliebiger Functionen herzuleiten, und wenn es kein anderes Verfahren gäbe, so müßte man, um in der Anwendung der Differentialrechnung nicht überall durch weitläufige Rechnungsoperationen aufgehalten zu werden, einen neuen Theil der operativen Differentialrechnung ausbilden, welcher zum Zwecke hätte, die Resultate dieser Operation für die Fundamentalfunctionen und die Hauptarten ihrer arithmetischen Zusammensetzung in kurzen Differentiationsregeln aufzustellen, in ähnlicher Weise, wie wir beim ersten Differentialquotient für die Fundamentalfunctionen und die Hauptarten ihrer Zusammensetzung kurze Differentiationsregeln aufgestellt haben, durch welche wir dann der weitläufigen Bildung des ersten Differenzquotienten und des Uebergangs zum Grenzwerth desselben ein- für allemal überhoben werden. Aber wir bedürfen eines solchen neuen Theiles der operativen Differentialrechnung nicht, weil die

für die Bildung des ersten Differentialquotienten aufgestellten Regeln zur Bildung des zweiten Differentialquotienten völlig hinreichen, und eine wiederholte Anwendung dieser Regeln schon zum Ziele führt.

Um dies nachzuweisen, brauchen wir nur zuerst zu zeigen, daß der Unterschied der Zunahmen einer Function dividirt durch das Quadrat der Zunahme der willkürlich Veränderlichen, was wir bisher den zweiten Differenzquotient genannt haben, auch erhalten wird, wenn man den Differenzquotient von dem Differenzquotienten dieser Function nimmt, oder daß für eine durch y vorgestellte Function von x diejenige Folge von Operationen, welche durch die Form $\frac{\Delta\Delta y}{(\Delta x)^2}$ angedeutet wird, dasselbe Resultat liefert als diejenige Folge von Operationen, welche in der Form $\frac{\Delta\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}{\Delta x}$ angedeutet ist. Die Nachweisung der Einerleiheit dieser Ausdrücke wird gegeben sein, wenn gezeigt ist, daß die an einer Function f(x) dargestellte schematische Ausführung dieser Ausdrücke auf dieselbe Form hinausläuft. Bilden wir also zuerst nach dem früher angewendeten Verfahren den Unterschied der Zunahmen der Function f(x). Wir geben zu diesem Zweck der willkürlich Veränderlichen die drei Werthe x, $x + \Delta x$ und $x + 2\Delta x$. Die zugehörigen Werthe der Function sind $f(x)$, $f(x + \Delta x)$ und $f(x + 2\Delta x)$. Durch Abziehung des ersten Werthes der Function von dem zweiten, und des zweiten von dem dritten erhalten wir $f(x + \Delta x) - f(x)$ und $f(x + 2\Delta x) - f(x + \Delta x)$ als die Zunahmen der Function, und durch Abziehung der ersten Zunahme von der zweiten in dem Ausdruck

$$f(x + 2\Delta x) - f(x + \Delta x) - [f(x + \Delta x) - f(x)]$$

oder nach ausgeführter Subtraction in dem Ausdruck

$$f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x)$$

den Unterschied der Zunahmen der Function. Wird dieser

Unterschied der Zunahmen durch $(\Delta x)^2$ dividirt, so gibt uns der Ausdruck

$$\frac{f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x)}{(\Delta x)^2}$$

das ausgeführte allgemeine Schema des zweiten Differenzquotienten in der Bedeutung, wie wir denselben bisher abgeleitet und gebraucht haben, oder es ist, in Form einer Gleichung ausgedrückt,

$$\frac{\Delta\Delta f(x)}{(\Delta x)^2}=\frac{f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x)}{(\Delta x)^2}$$

Das Schema des ersten Differenzquotienten der Function $f(x)$ ist bekanntlich $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Wird von dieser Function von Neuem der Differenzquotient genommen nach der bekannten Regel, indem man $x+\Delta x$ statt x in die Function setzt, und von dem so erhaltenen Werth der Function den früheren Werth derselben abzieht und schließlich durch Δx dividirt, so erhalten wir in dem Ausdruck

$$\frac{\dfrac{f(x+2\Delta x)-f(x+\Delta x)}{\Delta x}-\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}{\Delta x}$$

oder nach Ausführung der Subtraction im Zähler und mit einfachem Nenner geschrieben in dem Ausdruck

$$\frac{f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x)}{(\Delta x)^2}$$

das allgemeine Schema des Differenzquotienten von dem Differenzquotienten der Function $f(x)$, oder es ist, in Form einer Gleichung ausgedrückt,

$$\frac{\Delta\left[\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}\right]}{\Delta x}=\frac{f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x)}{(\Delta x)^2}$$

Wir sehen also, daß man durch die in den Ausdrücken

$\frac{\Delta\Delta f(x)}{(\Delta x)^2}$ und $\frac{\Delta\left[\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}\right]}{\Delta x}$ angedeutete verschiedene Folge

von Operationen auf dieselbe Function von x geführt wird. Folglich fällt auch der durch Annullirung von Δx hervorgehende Grenzwerth des Ausdrucks $\frac{\Delta\Delta y}{(\Delta x)^2}$ mit dem des Ausdrucks $\frac{\Delta\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}{\Delta x}$ zusammen. Es ist aber offenbar einerlei, ob man erst den zweiten Differenzquotient einer Function y in der Form $\frac{\Delta\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}{\Delta x}$ vollständig entwickelt, und dann durch Annullirung des Δx zum Grenzwerth übergeht, oder ob man zuerst blos den ersten Differenzquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ darstellt, und zu $\frac{dy}{dx}$ oder dem Grenzwerth desselben übergeht, und dann den durch $\frac{\Delta\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\Delta x}$ auszudrückenden ersten Differenzquotient der Function $\frac{dy}{dx}$ entwickelt, und von Neuem zu dem durch $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$ zu bezeichnenden Grenzwerth desselben übergeht. Aus der Form $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$ ist ersichtlich, daß man kurzweg durch Bildung des Differentialquotienten vom Differentialquotienten den Grenzwerth des zweiten Differenzquotienten oder den zweiten Differentialquotient erhält, und daß mithin die bekannten Regeln zur Bildung des ersten Differentialquotienten auch zur Bildung des zweiten hinreichen. Hierdurch wird die Operation sehr abgekürzt und vereinfacht, und anstatt also in der oben angegebenen weitläufigen Weise für die Function $\frac{1}{4}x^3$ erst die Zunahmen der

Function, dann den Unterschied dieser Zunahmen zu berechnen, und nach Division mit $(\Delta x)^2$ zum Grenzwerth überzugehen, welcher gleich $\frac{3}{2}x$ gefunden wurde, konnte man ganz kurz zu demselben Resultate kommen, wenn man sagte, der Differentialquotient von $\frac{1}{4}x^3$ ist $\frac{3}{4}x^2$, und der von $\frac{3}{4}x^2$ ist $\frac{3}{2}x$.

Weil man nun zur wirklichen Herleitung des zweiten Differentialquotienten einer Function von demselben nichts weiter zu wissen braucht, als daß er der Differentialquotient von dem Differentialquotienten dieser Function ist, so ist es begreiflich, daß man die ganze Lehre vom zweiten Differentialquotienten auf die aus der Form $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$ zu entnehmende Definition und auf die in derselben Form unmittelbar ausgesprochene Bedeutung desselben kann zusammenschrumpfen lassen, wenn man nur die operativen Handarbeiten zur Darstellung der Formeln und Functionen als das Wesentliche im Auge hat. Die Bezeichnung $\frac{d^2g}{dx^2}$ des zweiten Differentialquotienten erscheint dann als eine inhaltleere und überflüssige Zugabe, überflüssig wenigstens in sofern, als man außerdem im Besitz einer kurzen willkürlichen Bezeichnung wie $f''(x)$ ist, die sich bequem auf höhere Ordnungen ausdehnen läßt, was bei der Bezeichnung $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$ nicht der Fall ist. In den beiden Bezeichnungen $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ des zweiten Differentialquotienten ist aber vielmehr eine Hinweisung enthalten auf die beiden Bedeutungen desselben, vermöge welcher der zweite Differentialquotient erstens die Beschleunigung des Wachsens der Größen y und x angibt, was durch die

Form $\frac{d^2y}{dx^2}$ angedeutet ist, und zweitens die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens der Größen $\frac{dy}{dx}$ und x ausdrückt, worauf die Form $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$ hinweist. Von diesen beiden Bedeutungen des zweiten Differentialquotienten macht man überall nach Belieben, wie es das Bedürfniß und die Natur einer Aufgabe mit sich bringt, Gebrauch.

§. 113.

Constructive Ausführung der moment. Beschleunigung d. Wachsens.

Durch die in dem Vorhergehenden enthaltene Erklärung der Bedeutung des zweiten Differentialquotienten wird die Größe der constanten Beschleunigung des Wachsens, welche bei einer ungleichförmig beschleunigt wachsenden Größe momentan eintritt, zunächst nur arithmetisch durch den Zahlenwerth des Unterschiedes der Zunahmen der abhängig Veränderlichen gegeben. Alle Begriffe jedoch, welche die stetige Veränderung der Stärke des Wachsens betreffen, haben, wie in dem ersten Theile unserer Wissenschaft (§. 31) bereits nachgewiesen, ihre wahre objective Realität nur in den wachsenden continuirlichen Größen. Und wenn man einer Function von x eine momentane Beschleunigung des Wachsens beilegt, so thut man dies doch nur in sofern, als man sich die Zahl x stetig wachsend denkt. Unter einer stetig wachsenden Zahl ist aber in der That nichts weiter als ein wachsendes Continuum, nur statt eines bestimmten ein Continuum in abstracto gedacht, wenn überhaupt der Unterschied von discreten und continuirlichen Größen, wie er es denn ist, ein wahrer und wesentlicher ist, und darauf beruht, daß beim Wachsen des Continuums alle zwischen zwei Größenzuständen denkbaren unendlich vielen Mittelstufen der Größe factisch durchlaufen werden, beim Wachsen der Zahlen aber, durch wie kleine Theile auch stattfin-

dend, immer unendlich viele Zwischenstufen der Größe nothwendig übersprungen werden müssen, indem das Zählen als ein Denkact die Unendlichkeit nicht erschöpfen kann, welche in dem Wachsen des Continuums als einem Anschauungsact real vorhanden ist. Sowie die Vorstellung einer momentanen Stärke des Wachsens erst sinn- und lebenvoll wird durch die Anschauung derselben in wachsenden Continuis, so verhält es sich auch mit der Vorstellung der momentanen Beschleunigung des Wachsens. Wenn z. B. das Verhältniß, welchem sich die Zunahmen der Ordinaten einer Curve in einem bestimmten Curvenpunkt mit Verkleinerung dieser Zunahmen ohne Ende nähern, oder mit welchem sie verschwinden, dadurch, daß es in den Zunahmen der Ordinaten der Tangente dieses Curvenpunktes zur Ausführung kommt, sinnlich anschaulich wird trotz des angenommenen Verschwindens der Zunahmen, und man in den Ordinaten der Tangente sieht, wie die Ordinaten der Curve verlaufen würden, wenn die momentane Stärke des Wachsens sich realisirte, so kann man auch die momentane Beschleunigung des Wachsens der Ordinaten einer Curve zur Anschauung bringen, wenn man an den Ordinaten einer andern Linie zeigt, wie diese Ordinaten der Curve verlaufen würden, wenn die momentane Beschleunigung sich realisirte. Diese Construction der momentanen Beschleunigung des Wachsens, welche an allen beliebigen veränderlich gesetzten räumlichen Elementen ausgeführt werden kann, trägt nicht wenig bei zur Aufhellung und Befestigung unserer Begriffe von den höheren Graden der Stärke des Wachsens.

Nehmen wir z. B. die Curve fgchi (Fig. 56), welche nach der Gleichung $y = \frac{1}{4}x^3$ construirt ist, wobei der Nullpunkt der Abscisse im Punkte c und die Linie cd gleich 1 gesetzt ist. Der zweite Differentialquotient der Function $\frac{1}{4}x^3$ ist gleich $\frac{3}{2}x$, und folglich ist im Punkte h z. B.,

für welchen x den Zahlenwerth 1 hat, die Beschleunigung des Wachsens der Ordinaten gleich $\frac{3}{2}$. Es wird gefragt, wie die Curve vom Punkte h aus verlaufen würde, wenn die in diesem Punkte vorhandene momentane Beschleunigung des Wachsens der Ordinaten zur Ausführung käme. Eine constante Beschleunigung des Wachsens der Parallelcoordinaten findet sich nur in den Ordinaten der gemeinen Parabel bei einer gewissen Lage der Ordinatenaxe, wie oben (§. 108) schon gezeigt worden. Es fragt sich also nur, wie construirt man diejenige Parabel, welche im Punkte h mit der Curve zusammentrifft, und welche mit derselben außer der Stärke des Wachsens der Coordinaten auch die Beschleunigung des Wachsens derselben gemeinschaftlich hat. Wir haben die Gleichung der Parabel, bezogen auf dieselbe Abscisse und auf denselben Anfangspunkt der Abscisse, aufzusuchen. Die gesuchte Gleichung wird die Form $y = a + bx + cx^2$ haben, und es sind die unbestimmten Coefficienten a, b und c zu bestimmen. Dies ist leicht zu bewerkstelligen, weil wir drei Bedingungsgleichungen aufstellen können, in welchen außer a, b und c keine Unbekannten vorkommen. Es soll nämlich erstens für den Punkt h oder den Zahlenwerth 1 der Abscisse die Ordinate der Parabel dieselbe Größe haben wie die Ordinate dh der Curve, und da für $x = 1$ die Ordinate der Parabel gleich $a + b + c$, und die der gegebenen Curve gleich $\frac{1}{4}$ ist gemäß der Function $\frac{1}{4}x^3$, so erhalten wir als erste Gleichung

$$a + b + c = \frac{1}{4}.$$

Es sollen ferner beide Curven im Punkte h eine gemeinschaftliche Stärke des Wachsens ihrer Coordinaten haben, d. h. es soll der erste Differentialquotient der Function $a + bx + cx^2$ so groß sein als der erste Differentialquotient

der Function $\frac{1}{4}x^3$, wenn in beiden 1 statt x gesetzt wird. Die Differentialquotienten der beiden Functionen, nämlich $b+2cx$ und $\frac{3}{4}x^2$, geben uns also die zweite Bedingungsgleichung

$$b+2c=\frac{3}{4}.$$

Endlich muß, da die Beschleunigung des Wachsens der Ordinaten der Parabel mit der der gegebenen Curve im Punkte h zusammenfallen soll, 2c als der zweite Differentialquotient der Function $a+bx+cx^2$ gleich dem zweiten Differentialquotienten der Function $\frac{1}{4}x^3$ oder gleich $\frac{3}{2}x$ sein, wenn man 1 statt x setzt. Es ist also drittens

$$2c=\frac{3}{2} \text{ oder } c=\frac{3}{4}.$$

Gehen wir mit diesem Werth von c in die zweite Gleichung zurück, so erhalten wir $b+\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$ oder $b=-\frac{3}{4}$. Werden schließlich diese für b und c gefundenen Werthe in die erste Gleichung gesetzt, so erhalten wir $a-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ oder $a=\frac{1}{4}$. Die vorausgesetzte unbestimmte Gleichung der Parabel, $y=a+bx+cx^2$ nimmt also unter den gegebenen Bedingungen die bestimmte Form $y=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}x^2$ an. Legen wir einige Punkte der Parabel fest. In den Punkten c, k, d, l, e, wo die Abscisse der Reihe nach die Zahlenwerthe $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}$ hat, erhält man als Werthe der Ordinaten der Parabel die Zahlen $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \frac{13}{16}, \frac{7}{4}$, und dadurch die Parabel mnhop. Fragte

man also, wie würde die Curve fgchi vom Punkte h aus verlaufen, wenn nur die momentane Stärke des Wachsens ihrer Coordinaten zur Ausführung käme, so ist die Antwort, in derjenigen geraden Linie, für deren Ordinaten diese Stärke des Wachsens constant ist, d. h. in der Tangente hq des Punktes h. Fragt man aber, wie würde die Curve vom Punkt h aus verlaufen, wenn bei der in diesem Punkt vorhandenen Stärke des Wachsens ihrer Ordinaten die daselbst vorhandene Beschleunigung des Wachsens ihrer Ordinaten zur Ausführung käme, so ist die Antwort, in derjenigen Linie, für deren Ordinaten diese Beschleunigung des Wachsens constant ist, d. h. in der Parabel mnhop.

Durch diese Construction der momentanen Beschleunigung des Wachsens wird das, was früher (§. 110) über die Bedeutung des zweiten Differentialquotienten, sowie das, was (§. 111) über die Bedeutung des isolirten zweiten Differentials gesagt worden ist, vollkommen augenfällig und kann zugleich auf faßlichere und concretere Weise ausgedrückt werden. Wenn wir die §. 110 gegebene allgemeine Erklärung der Bedeutung des zweiten Differentialquotienten auf die Ordinate y einer beliebigen Curve übertragen, so stellt der zweite Differentialquotient der Function y nichts weiter vor als die Unterschiede der Zunahmen der Ordinaten der jedesmaligen Parabel bei Zunahmen der Abscisse $=1$. Und wenn §. 111 von dem isolirten und folglich als endliche Zahl betrachteten zweiten Differential d^2y gesagt wurde, daß es nicht Unterschiede der Zunahmen von y, sondern den Unterschied der mit den beliebigen Zunahmen dx verbundenen Zunahmen einer Größe angebe, in welcher diejenige Beschleunigung des Wachsens constant ist, die für y selbst momentan vorhanden ist, so können wir jetzt, wo wir für den Fall, daß y eine Ordinate ist, jene Größe mit constanter Beschleunigung des Wachsens kennen, kurzweg sagen, das zweite Differential d^2y einer Ordinate y stellt nicht den Unterschied der Zunahmen von y selbst,

sondern den Unterschied der mit den beliebigen Zunahmen dx der Abscisse verbundenen Zunahmen der Ordinaten einer Parabel vor.

Die Parabel schließt sich dem Lauf der gegebenen Curve in der Nähe des Punktes h nothwendig viel enger an als die Tangente hq dieses Punktes, weil bei der Tangente nur die Zunahme ihrer Ordinate um so näher mit der Zunahme der Ordinate der Curve zusammenfällt, je kleiner die Zunahme der Abscisse gesetzt wird, bei der Parabel aber auch der Unterschied der Zunahmen ihrer Ordinaten um so näher mit dem Unterschied der Zunahmen der Ordinaten der Curve zusammenfällt, je kleiner die Zunahmen der Abscisse gesetzt werden. Es läßt sich sogar beweisen, daß man durch Annäherung an den Punkt h zu Curvenpunkten gelangen kann, deren Entfernung von der Parabel beliebig vielmal kleiner ist als ihre Entfernung von der Tangente, beide Entfernungen in der Richtung der Ordinaten gemessen. (Dieser Beweis soll später im umfassenderen Zusammenhang mit den höheren Differentialquotienten berührt werden.) Nichts desto weniger hat die Parabel so gut wie die Tangente mit der gegebenen Curve an der Berührungsstelle nur einen einzigen Punkt gemeinschaftlich, was erstens daraus folgt, daß die Ordinaten beider krummen Linien durch verschiedene Functionen der Abscisse gegeben sind, und zweitens auch daraus ersichtlich ist, daß die Beschleunigung des Wachsens, welche für die Ordinaten der Parabel constant ist, für die Ordinaten der andern Curve stetig veränderlich ist, und mithin die Letzteren innerhalb jeder beliebig kleinen über den Berührungspunkt hinausgehenden Strecke ein anderes Gesetz des Wachsens haben, und folglich auch eine andere Größe erreichen müssen. Man sagt von zwei Linien, welche im Punkte ihres Zusammentreffens außer der Stärke des Wachsens auch die Beschleunigung des Wachsens ihrer Coordinaten gemeinschaftlich haben, oder welche den ersten und zweiten Differentialquotienten ihrer Ordinaten gleich haben, daß sie sich im zweiten

Grade berühren, während man die Berührung zweier Linien, welche nur den ersten Differentialquotient ihrer Ordinaten gleich haben, eine Berührung im ersten Grade nennt. Es versteht sich, daß zur Berührung im zweiten oder im ersten Grade nicht erfordert wird, daß der zweite oder erste Differentialquotient der Ordinaten der Einen Linie constant ist, wie es hier bei der Parabel und bei der Tangente der Fall ist.

Auf dieselbe Weise, wie für den Punkt h der Curve fgchi Fig. 56 die momentane Beschleunigung des Wachsens der Ordinaten construirt worden ist, kann es für jeden andern Punkt geschehen. Die berührende Parabel hat in jedem Punkt einen andern der jedesmaligen Beschleunigung des Wachsens angemessenen und von derselben allein abhängigen Parameter. Verlangt man nur die Größe dieses Parameters zu wissen, so muß man sich erinnern, daß in der Gleichung $y = a + bx + cx^2$ der Parabel der Coefficient c mit dem Parameter p der Parabel so zusammenhängt, daß $p = \frac{1}{c}$ ist. Da nun 2c, als der zweite Differentialquotient der Function $a + bx + cx^2$, die constante Beschleunigung des Wachsens der Ordinaten der Parabel und folglich auch die momentane Beschleunigung des Wachsens der Ordinaten der Curve in dem von der Parabel berührten Punkte ausdrückt, so ist ersichtlich, daß man den für einen Curvenpunkt berechneten zweiten Differentialquotient der Ordinaten nur zur Hälfte zu nehmen und damit in 1 zu dividiren braucht, um den Parameter der diesen Punkt berührenden Parabel zu erhalten. Im Punkt i z. B. unserer Curve, wo x den Zahlenwerth 2 hat, nimmt der zweite Differentialquotient $\frac{3}{2}x$ den Zahlenwerth 3 an, und es ist demnach der Parameter der im Punkt i im zweiten Grad berührenden Parabel gleich $\frac{2}{3}$. Je kleiner die Abscisse x und folglich auch der zweite Differentialquo-

tient $\frac{3}{2}x$ wird, desto größer wird der Parameter der berührenden Parabel, und derselbe durchläuft bis zum Punkte c alle beliebig großen Zahlenwerthe. Im Punkte c selbst, wo x und folglich auch $\frac{3}{2}x$ gleich Null ist, wird der Parameter unendlich, und die berührende Parabel wird eine gerade Linie und fällt in diesem Falle mit der Linie ab, welche zugleich Tangente im Punkte c ist, zusammen. Im Punkte c wird also die krumme Linie von der geraden ab im ersten und zugleich im zweiten Grade berührt, was begreiflicherweise nur bei solchen Curvenpunkten stattfinden kann, in welchen die Beschleunigung des Wachsens der Ordinaten der Curve gleich Null ist, weil dieselbe für die Ordinaten der geraden Linie immer und überall gleich Null ist. Hierbei ist übrigens der Fall, in welchem der erste und zweite Differentialquotient der Coordinaten der Curve unendlich ist, vorläufig außer Acht gelassen ist.

Man sieht leicht, daß, wie auch der Lauf einer Curve von einem bestimmten Punkt aus sein mag, es immer möglich ist, eine im zweiten Grad berührende Parabel durch denselben Punkt gehen zu lassen, durch deren Ordinaten die vorhandene Beschleunigung oder Retardation des Wachsens sowie des Abnehmens der Ordinaten der Curve zur Anschauung gebracht wird. Wir wollen diese Construction noch ausführen für einen Fall, in welchem eine Retardation des Wachsens der Ordinaten stattfindet. In dem Viertelkreis acm Fig. 57 werden die Zunahmen der Ordinaten immer kleiner, wenn man die Abscisse ac vom Punkte a aus wachsend denkt. Setzen wir den Halbmesser ac = 1 und in a den Nullpunkt der Abscisse, so ist die Gleichung für die senkrechten Parallelcoordinaten des Kreises bekanntlich $y = (2x - x^2)^{\frac{1}{2}}$. Im Punkte b habe x den Zahlenwerth $\frac{1}{2}$ und es soll die Gleichung der Parabel aufgestellt werden, welche den Kreis in dem zugehörigen Curvenpunkte d im

zweiten Grade berührt. Der erste Differentialquotient der Function $(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}$ ist $\frac{1-x}{(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}}$, und der zweite ist $\frac{-1}{(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Die unbestimmte Gleichung der Parabel, auf dieselbe Abscisse ac und denselben Anfangspunkt a bezogen, sei $y=a+bx+cx^2$, und es sind die Zahlen a, b und c zu bestimmen. Nun soll erstens die Function $a+bx+cx^2$ gleich sein der Function $(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}$, wenn in beiden $\frac{1}{2}$ statt x gesetzt wird, mithin erhalten wir als erste Gleichung $a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}c=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ferner sollen für $x=\frac{1}{2}$ die ersten Differentialquotienten dieser Functionen gleich sein; dies gibt als zweite Gleichung $b+c=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Und endlich sollen die zweiten Differentialquotienten dieser Functionen gleich sein für $x=\frac{1}{2}$. Daraus geht als dritte Gleichung hervor $2c=-\frac{8}{3\sqrt{3}}$. Bestimmen wir durch diese drei Gleichungen die Werthe von a, b und c, so erhalten wir $c=-\frac{4}{3\sqrt{3}}$, $b=\frac{7}{3\sqrt{3}}$, und $a=\frac{2}{3\sqrt{3}}$. Die gesuchte bestimmte Gleichung der Parabel ist also

$$y=\frac{2}{3\sqrt{3}}+\frac{7}{3\sqrt{3}}x-\frac{4}{3\sqrt{3}}x^2.$$

Vermöge dieser Gleichung hat die Ordinate der Parabel im Punkte a, wo $x=0$, den Werth $\frac{2}{3\sqrt{3}}$; im Punkte b, wo $x=\frac{1}{2}$, den Werth $\frac{\sqrt{3}}{2}$ wie die Ordinate des Kreises; im Punkte g, wo $x=\frac{7}{8}$, hat die Ordinate ihren größten Werth, und ist gleich $\frac{27}{16\sqrt{3}}$, und die Linie kdh stellt die

gesuchte Parabel vor. Wenn also die im Punkte d vorhandene momentane Beschleunigung des Wachsens der Ordinaten des Kreises zur Ausführung käme, so würden diese Ordinaten so wachsen wie die Ordinaten der Parabel kdh.

Es wird nicht überflüssig sein, auch noch für andere räumliche Elemente ein Beispiel der Construction der momentanen Beschleunigung des Wachsens zu geben. Die veränderlichen räumlichen Elemente mögen sein eine gerade Linie als Abscisse und der durch senkrechte Parallelcoordinaten erzeugte Flächenraum. Eine constante Beschleunigung des Wachsens der Fläche findet für diese Coordinaten nur statt, wenn die flächenerzeugenden Ordinaten die Ordinaten einer geraden Linie sind (siehe §. 108), oder in einem Paralleltrapez, dessen parallele Seiten die Ordinaten, und dessen ungleichlaufende Seiten die Abscisse und die durch die Ordinaten vorgeschriebene gerade Linie sind. Die Größe der constanten Beschleunigung des Wachsens der Fläche hängt nur von der Neigung der geraden Linie gegen die Abscisse ab. Da der constante zweite Differenzquotient der Fläche nichts weiter ist als der Unterschied der Zunahmen der Fläche bei zwei Zunahmen der Abscisse im Werthe von 1, so sieht man, daß der Zahlenwerth dieses zweiten Differenzquotienten zusammenfällt mit dem Zahlenwerth, um welchen die Ordinate der geraden Linie wächst, wenn die Abscisse um die Zahl 1 wächst.

Bei jeder krummen Linie findet eine veränderliche Beschleunigung des Wachsens der zwischen ihren Ordinaten enthaltenen Fläche statt, und es fragt sich, wie man dasjenige Paralleltrapez construirt, dessen constante Beschleunigung des Wachsens seiner Fläche mit der momentanen der Curvenfläche zusammenfällt. Wir wissen (§. 49), daß der erste Differentialquotient derjenigen Function der Abscisse, welche die Curvenfläche ausdrückt, identisch ist mit der Function der Abscisse, welche die Ordinate der Curve angibt. Mithin wird der erste Differentialquotient der die Ordinate ausdrückenden Function zugleich der zweite Dif-

ferentialquotient der die Curvenfläche ausdrückenden Function sein. Der für einen beliebigen Curvenpunkt berechnete erste Differentialquotient der Ordinate gibt aber bekanntlich an, um wie viel die Ordinate der Tangente dieses Punktes wächst, wenn die Abscisse um die Zahl 1 wächst. Da nun, wie vorher bemerkt, diese Zunahme der Ordinate einer geraden Linie zusammenfällt mit dem constanten zweiten Differenzquotienten der von den Ordinaten dieser geraden Linie beschriebenen Fläche, so sieht man, daß die Tangente eines Curvenpunktes mit der Abscisse und den Ordinaten dasjenige Paralleltrapez bildet, in dessen Fläche die in diesem Curvenpunkte vorhandene momentane Beschleunigung des Wachsens der Curvenfläche zur Ausführung kommt oder constant ist. Für die Kreisfläche Fig. 57 wird also das Paralleltrapez dbco die im Punkte d vorhandene momentane Beschleunigung des Wachsens der Curvenfläche angeben, d. h. der für den Punkt d berechnete zweite Differentialquotient der die Kreisfläche ausdrückenden Function gibt an, um wie viel jede folgende Zunahme der Fläche dieses Paralleltrapezes größer ist als die vorhergehende, wenn die Abscisse zweimal um die Zahl 1 wächst. Man übersieht in dieser Construction recht bequem, wie die momentane Stärke des Wachsens mit der Beschleunigung des Wachsens verbunden ist. Käme nämlich nur die im Punkte d vorhandene momentane Stärke des Wachsens der Kreisfläche zur Ausführung, so würde bei wachsender Abscisse die Kreisfläche wachsen wie das Parallelogramm dbcp; käme aber bei derselben momentanen Stärke des Wachsens auch die momentane Beschleunigung des Wachsens der Kreisfläche zur Ausführung, so würde sie wachsen wie das durch die Größe der Ordinate und die Neigung der Tangente vorgeschriebene Paralleltrapez.

Wir halten, um für andere in Bezug auf Flächen versuchte räumliche Deutungen der höheren Differentialquotienten keinen Raum zu lassen, es nicht für undienlich, noch ausdrücklich auf die Versehen hinzuweisen, durch welche

es veranlaßt worden ist, daß man bei diesen Versuchen auf falsche Fahrten und als Folge davon schon bei den ersten Schritten ins Stocken gerathen ist. Zuerst ist es, auch ganz abgesehen von dem Differentialquotienten, als eine wenn auch für gewöhnlich unschädliche so doch ungenaue Ausdrucksweise zu bezeichnen, wenn man sagt: Der in Quadraten ausgedrückte Flächeninhalt eines rechtwinkligen Parallelogramms dividirt durch den Zahlenwerth der Einen Seite des Parallelogramms gibt die andere Seite des Parallelogramms. Es ist zwar wahr, daß dieser Quotient mit dem Zahlenwerth der andern Seite des Parallelogramms zusammenfällt; aber wenn ich einen Flächeninhalt, also eine Anzahl von Quadratfußen oder andern Flächeneinheiten durch irgend eine Zahl dividire, so erhalte ich doch nothwendig wieder eine Anzahl Quadratfuße als Quotient und keine Linie. Man sollte also eigentlich sagen: der in Quadraten ausgedrückte Flächeninhalt eines rechtwinkligen Parallelogramms dividirt durch den Zahlenwerth der Einen Seite des Parallelogramms gibt den Flächeninhalt eines von der andern Seite des Parallelogramms und von einer Seite $=1$ als Nachbarseiten gebildeten Parallelogramms. Wenn man nun auf die eben berügte ungenaue Ausdrucksweise fußend sagt, der erste Differentialquotient der die Fläche ausdrückenden Function der Abscisse wird dargestellt durch die Ordinate, so ist man auf diese Weise schon beim ersten Differentialquotienten aus der Fläche heraus, in die man denn natürlich bei den folgenden Differentialquotienten nie wieder hineinkommt. Man muß sich übrigens in der That die Bedeutung des ersten Differentialquotienten überhaupt niemals klar gedacht und mit klaren Worten ausgesprochen haben, um die Ordinate für den Repräsentanten des ersten Differentialquotienten der Fläche ausgeben zu können. In §. 36 ist der allgemeine Sinn des ersten Differentialquotienten so ausgesprochen: „Der erste Differentialquotient gibt an die Zahl der Einheiten, um welche die abhängig Veränderliche wachsen würde bei einer Zu-

nahme der willkürlich Veränderlichen =1, wenn die vorhandene Stärke des Wachsens unverändert bliebe.“ Wenn nun gegen diese Erklärung wol Niemand etwas einzuwenden haben wird, so muß, wenn sie auf eine Fläche als abhängig Veränderliche übertragen wird, unmittelbar folgen, daß der erste Differentialquotient der Curvenfläche das Parallelogramm angibt, welches von der jedesmaligen Ordinate und einem gleich 1 gesetzten Abscissenstück als Nachbarseiten gebildet wird. Diese geometrische Bedeutung des ersten Differentialquotienten der Curvenfläche ist keine beliebige neben andern Deutungen auch gestattete, sondern die einzig mögliche wahre und reale, da sie aus der allgemeinen Bedeutung des ersten Differentialquotienten unausweichlich folgt. Dasselbe gilt von dem als Repräsentant des zweiten Differentialquotienten der Curvenfläche nachgewiesenen Flächenraum. Man braucht nur die oben (§. 110) gegebene allgemeine Erklärung der Bedeutung des zweiten Differentialquotienten wörtlich und streng auf den vorliegenden Fall anzuwenden, um sich zu überzeugen, daß der räumliche Repräsentant des Werthes des zweiten Differentialquotienten nichts Anderes sein kann, als der Unterschied der Flächenzunahmen des Paralleltrapezes. Wenn wir in dem Kreis Fig. 57 dem Radius einen solchen Zahlenwerth beilegen, daß die gleichen Linien be und ef den Zahlenwerth 1 haben, und demgemäß die Gleichung des Kreises gebildet denken, so wird die die Ordinate ausdrückende Function, als der erste Differentialquotient der die Fläche angebenden Function betrachtet, für den Punkt d berechnet das Parallelogramm dbei bezeichnen, und der zweite Differentialquotient der Flächenfunction nichts Anderes als das Parallelogramm gefr bezeichnen, in sofern angenommen wird, daß die Linie el um das Stück qe größer ist als die Linie bd.

Diese Beispiele von Constructionen der momentanen Beschleunigung des Wachsens werden hinreichen, um eine Einsicht in das Wesentliche dabei zu gestatten, und Jeden in den Stand zu setzen, diese Construction auch bei andern

räumlichen Elementen auszuführen, und sich, wenn es beliebte, die Beschleunigung des Wachsens derselben zu versinnlichen. Wir wollen nur schließlich an diese Flächenconstruction noch eine allgemeine Bemerkung anknüpfen. Sowie die Flächen der Figuren bekanntlich fast immer gebraucht werden, um die Vorstellung des bestimmten Integrals oder überhaupt des Integrals, als Summe von Incrementen betrachtet, zu verdeutlichen (siehe §. 58), so bieten sie auch ein gutes Mittel dar, den Begriff der Differentialquotienten und den Begriff der stetig veränderlichen Stärke des Wachsens überhaupt zu erläutern. Aus dem Begriff einer stetigen Veränderung der Stärke des Wachsens folgerten wir schon bei der Lehre vom ersten Differentialquotienten, daß absolut in demselben Moment, in welchem eine bestimmte Stärke des Wachsens eintritt, auch schon eine Veränderung dieser Stärke des Wachsens eintreten muß, weil mit der Veränderung nicht gewartet werden kann bis zu einem andern, wenn auch noch so nahe liegenden Verflußpunkt. Wie aber die Bestimmtheit der Stärke des Wachsens mit einer Veränderung derselben verbunden zu denken ist, so daß nicht die Stärke des Wachsens als eine bestimmte und zugleich als eine andere erscheint, was ein vollkommen sinnloser Widerspruch wäre, das war vielleicht früher nicht so ganz klar, wird aber jetzt, wo wir die Veränderung der Stärke des Wachsens nach Art und Größe zu bestimmen gelernt haben, ganz deutlich sein. In der für Flächen ausgeführten Construction der momentanen Beschleunigung des Wachsens wird es ganz augenfällig, wie in demselben ausdehnungslosen Verflußpunkt, in welchem eine bestimmte Stärke des Wachsens eintritt, auch schon eine bestimmte Größe der Veränderung der Stärke des Wachsens vorhanden sein kann, weil die Stärke des Wachsens und die Beschleunigung des Wachsens eben zwei so verschiedene Begriffe sind, als ihre Repräsentanten, das Parallelogramm und das Paralleltrapez, verschiedene Figuren sind, die unbeschadet ihrer Verschieden-

heit mit gemeinschaftlicher Seite in demselben Verflußpunkt der willkürlich Veränderlichen zusammenfallen. Von hieraus fällt zugleich noch ein Licht auf die gewöhnliche Vorstellung vom Unendlichkleinen. Gemäß dieser Vorstellung soll die Stärke des Wachsens als eine bestimmte dadurch vorhanden sein, daß Zunahmen, die zwar unendlichklein genannt werden, die aber dennoch etwas von Null Verschiedenes bedeuten sollen, durch ihr Verhältniß die Stärke des Wachsens angeben. Wenn es nun mit diesen zwar unbestimmbaren, aber doch nicht mit Nullen zusammenfallenden Werthen der unendlichkleinen Zunahmen dx und dy ernstlich gemeint ist, und ihnen eine objective Wahrheit und Wirklichkeit beigelegt wird, so ist eigentlich innerhalb der unendlichkleinen Zunahme dx die Stärke des Wachsens unverändert gedacht, und der Begriff der stetigen Veränderung in seiner Strenge aufgehoben. Die wahre dieser Ansicht zu Grunde liegende Meinung kann nur sein, den strengeren Begriff der stetigen Veränderung für einen Schein zu erklären, und seinen Schwierigkeiten dadurch auszuweichen, daß man als das wahrhaft Reale der stetig veränderlich genannten Größen eine unbestimmbar große Anzahl von unbestimmbar kleinen Theilen oder Elementen betrachtet, die in sich keine Veränderung zeigen. Eine Veränderung der Stärke des Wachsens kann unter diesen Annahmen nur dadurch eintreten, daß mit einer folgenden zweiten unendlichkleinen Zunahme der willkürlich Veränderlichen eine andere Zunahme der abhängig Veränderlichen verbunden ist als mit der ersten. So fielen in der That eine bestimmte Stärke des Wachsens und eine bestimmte Größe der Veränderung der Stärke des Wachsens nicht genau in Einen Verflußpunkt zusammen, sondern sie behielten noch einen wenn auch unendlichkleinen Raum sich auszuweichen. Wer sich nun aber überzeugt hat, daß eine bestimmte Stärke des Wachsens und eine Beschleunigung des Wachsens wahrhaft in Einem Punkt zusammenfallen können, für den bezeichnet der strenge Begriff der stetigen

Veränderung eben das wahrhaft Objective und Reale, und die unendlichklein genannten Zunahmen erscheinen als eine subjective Form der Vorstellung. In der That verlieren die unendlich kleinen Zunahmen, die als eine Art Atome die Größen constituiren und als ein realer Begriff die Grundlage der Differentialrechnung bilden sollen, jeden starren abgesonderten Bestand, und schmelzen in einen stetigen Fluß der Veränderung zusammen.

§. 114.

Das Unendlichkleine der zweiten Ordnung.

Obgleich wir mit der Lehre vom zweiten Differentialquotienten im Wesentlichen zu Ende sind, so haben wir doch bisher eines Begriffs noch nicht Erwähnung gethan, und seiner auch nicht bedurft, der gewöhnlich in dieser Lehre eine Hauptrolle spielt, häufig sogar als der Wesentlichste an die Spitze derselben gestellt wird, wir meinen den Begriff des Unendlichkleinen der zweiten Ordnung. Was unter diesem Begriff gedacht werden muß, kann freilich, nachdem die Lehre von der Stärke und Beschleunigung des Wachsens und von den Zunahmen und Unterschieden der Zunahmen vorausgegangen ist, leicht verständlich gemacht werden. Will man ihn aber ohne Voraussetzung der Kenntniß der Eigenthümlichkeiten eines beschleunigten Wachsens als einen unmittelbar faßbaren Begriff definiren, so kann man nichts Anderes sagen, als eine unendlichkleine Zahl der zweiten Ordnung ist eine solche, welche unendlich vielmal kleiner ist als eine schlechtweg gesetzte unendlichkleine Zahl. So gefaßt ist schwer einzusehen, warum man nicht schon durch die unendlichkleine Zahl als solche jeden denkbaren Grad von Kleinheit sollte ausdrücken und erreichen und sogar überschreiten können, und wozu es noch verschiedener Stufen oder Grade des Unendlichkleinen bedarf, oder wodurch eine solche Annahme gerechtfertigt erscheint.

Sehen wir auf die früher erklärten Eigenthümlichkeiten des beschleunigten Wachsens zurück, so wissen wir, daß

bei constanter Beschleunigung des Wachsens die Unterschiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen im quadratischen Verhältniß der Zunahme Δx der willkürlich Veränderlichen abnehmen. Da nun jede ungleichförmige Beschleunigung des Wachsens sich um so mehr einer constanten nähert, je kleiner die Zunahmen Δx gesetzt werden, so folgt, daß überhaupt bei allen Functionen die Unterschiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen um so mehr im quadratischen Verhältniß von Δx abnehmen, je kleiner Δx gesetzt wird. Je mehr sich nun Δx dem Verschwinden nähert, desto mehr wird offenbar $(\Delta x)^2$ gegen Δx selbst verschwindend klein. Da nun, sobald nicht etwa die Stärke oder die Beschleunigung des Wachsens unendlichgroß ist, von welchem Fall, der nur in einzelnen Punkten eintreten kann, jetzt abgesehen werden soll, die Unterschiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen, welche durch $\Delta\Delta y$ vorgestellt sein mögen, zu $(\Delta x)^2$ ein endliches angebbares Verhältniß behalten bei allen auch bis zu Null fortgesetzt gedachten Verkleinerungen von Δx, so wird $\Delta\Delta y$ gegen Δx und folglich auch gegen Δy immer mehr verschwindend klein werden bei fortgesetzter Verkleinerung von Δx. Je kleiner also die Zunahmen der abhängig Veränderlichen werden, desto mehr werden die Unterschiede dieser Zunahmen verschwindend klein gegen die Größe dieser kleinen Zunahmen selbst. Und sowie die Zunahme der abhängig Veränderlichen über jede angebbare Grenze hinaus verkleinert gedacht werden kann, so kann auch das Verhältniß von $\Delta\Delta y$ zu Δy über jede angebbare Grenze hinaus verkleinert gedacht werden. Dies ist das einzig Objective und Thatsächliche in Betreff der unendlichkleinen Größen der zweiten Ordnung. Und wenn man unter den unendlichkleinen Größen der ersten und zweiten Ordnung nichts weiter versteht als veränderliche Größen, von welchen, indem Beide sich der Null nähern, die Eine in jedem beliebigen Verhältniß kleiner wird als die Andere, und welche vor dem wirklichen Uebergang in Null relativ zu

einander alle denkbaren Größenverhältnisse factisch durchlaufen, so ist gegen den Gebrauch dieses Wortes nichts einzuwenden.

In sofern man aber nach dem wirklichen Uebergang zu dem Grenzwerth des Differenzquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ diesen Grenzwerth noch als einen Quotienten von Zunahmen der veränderlichen Größen x und y betrachtet, denen man, obgleich man sie unendlichklein nennt, noch eine Art von Objectivität oder Realität beilegt, so wird dann natürlich der Unterschied zweier unendlichkleinen Zunahmen Δy unendlich vielmal kleiner als diese Zunahmen selbst. Wer sich vor dem ersten Schritt nicht scheut, und unter dem isolirten ersten Differential dy, im Sinne einer unendlichkleinen Größe genommen, noch eine reale objective Größe denkt, und auch nach dem Uebergang zum Grenzwerth des Differenzquotienten noch eine Art wirklicher Zunahmen der Veränderlichen übrig zu behalten glaubt, der darf auch vor dem zweiten Schritt nicht zurückbeben, und muß das zweite Differential d^2y als eine Zahl betrachten, welche unendlich vielmal kleiner ist als die unendlichkleine Zahl dy. Wir werden bald sehen, daß er auch einen dritten Schritt thun muß, und Zahlenwerthe annehmen, welche unendlich vielmal kleiner sind als die Zahlenwerthe des zweiten Differentials, und sofort ohne Ende. Die Hauptsache bleibt, daß man diese Verhältnisse durchaus nur als solche auffaßt, denen man sich durch Verkleinerung der Zunahmen beliebig nähern kann, und daß man sich dy immer so weit verkleinert denken kann, daß d^2y in seinem Verhältniß zu dy jede beliebige angebbare Grenze der Kleinheit überschreitet. Indem man aber diese Grenze der Annäherung erreicht denkt, hat man überhaupt keine Größen mehr, und folglich weder unendlichkleine Größen der ersten noch der zweiten Ordnung. Was man durch Uebergang zur Grenze der Annäherung wirklich erhält, sind Ausdrücke für die Stärke und die Beschleunigung des Wachsens. Man kann übri-

gens hier bemerken, daß nichts so paradox und abenteuerlich klingt, was nicht irgendwo seine natürliche Entstehung und im Zusammenhange mit derselben seinen einfachen guten Sinn hat.

Man glaube nur nicht, daß man dadurch etwas besonders Deutliches von der Bedeutung des zweiten Differentials und von der durch dasselbe ausgesprochenen Beschleunigung des Wachsens gesagt hat, daß man es als ein Unendlichkleines der zweiten Ordnung bezeichnet, und diese Definition an die Spitze der Lehre vom zweiten Differentialquotienten stellt. In der Anwendung dieses Begriffs wird man häufig in große Dunkelheiten gerathen. So wird z. B. in den meisten Fällen, wo man das zweite Differential einer unbekannten Function direct bestimmen will, dadurch, daß man es als die unendlichkleine Zunahme einer unendlichkleinen Zunahme der abhängig Veränderlichen auffaßt, etwas sehr Unfaßbares und Nebuloses in die Betrachtung kommen, und das Unsichere, Aengstliche und Scheue, mit welchem eine solche Aufgabe angegriffen wird, kann sich selten verbergen. Allerdings steht leicht zu besorgen, daß man so zarten und gebrechlichen Dingen wie die unendlichkleinen Größen der zweiten Ordnung sind, Gewalt anthue. Will man die Bedeutung des isolirten zweiten Differentials mit verständlichen Worten rund heraussagen, so muß sie so ausgesprochen werden, wie es §. 111 geschehen ist. Dabei ist denn auch ersichtlich, daß man das zweite Differential als eine massive Größe ganz herzhaft anfassen kann, ohne gleich eine Beschädigung zu fürchten.

Es ist vorher gesagt worden, daß im Allgemeinen für alle Werthe der willkürlich Veränderlichen, bei welchen der erste und zweite Differentialquotient einen endlichen Werth haben, durch fortgesetzte Verkleinerung von Δx der Unterschied der Zunahmen der abhängig Veränderlichen relativ zu der Zunahme der abhängig Veränderlichen über jede angebbare Grenze hinaus verkleinert werden könne. Es verdient bemerkt zu werden, daß dieser Satz noch eine Aus-

nahme erleidet in dem Falle, in welchem die Zunahmen Δx gesetzt werden von einem Punkte aus, für welchen der erste Differentialquotient gleich Null ist, der zweite aber nicht. Denn in diesem Fall wird bei fortgesetzter Verkleinerung von Δx die Größe Δy verschwindend klein gegen Δx; und da es sich mit $\Delta^2 y$ ebenso verhält, so können beide Größen, Δy und $\Delta^2 y$, von der Art sein, daß ihr Verhältniß auch bei beliebiger Verkleinerung von Δx ein bestimmtes Maß nicht überschreitet, oder daß ihr veränderliches Verhältniß sich einem festen Grenzwerth nähert.

§. 115.

Integration der Differentialformeln des zweiten Grades.

Mit dem Vorhergehenden ist die allgemeine Lehre vom zweiten Differentialquotienten geschlossen, und wir wollen nur noch kurz der durch die Einführung des zweiten Differentialquotienten hervortretenden neuen Regeln der Integration Erwähnung thun. Sowie in der Lehre vom ersten Differentialquotienten jeder neue Schritt der operativen Differentialrechnung uns neue Fundamentalformeln zur Integration lieferte, so wird auch durch die Lehre vom zweiten Differentialquotienten eine Erweiterung der Integralrechnung gegeben sein, in sofern aus der gegebenen Beschleunigung des Wachsens irgend einer Function diese Function selbst hergeleitet werden kann. Da indessen die Bildung des zweiten Differentialquotienten nur auf einer Wiederholung des bei Bildung des ersten Differentialquotienten angewendeten Verfahrens beruht, so ist klar, daß in allen den Fällen, in welchen der zweite Differentialquotient einer Function von x durch eine Function von x selbst und von x allein ausgedrückt erscheint, die Darstellung der ursprünglichen Function aus ihrem zweiten Differentialquotienten nur auf eine Wiederholung des beim ersten Differentialquotienten angewendeten Verfahrens der Integration hinauslaufen wird. Es sei z. B. die Function $-x^{-2}$ als der zweite Differentialquotient einer unbekannten durch y vorgestellten

Function von x gegeben durch die Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} = -x^{-2}$.

Nimmt man statt der Bezeichnung $\frac{d^2y}{dx^2}$ des zweiten Differentialquotienten diejenige, welche unmittelbar die Wiederholung der Operation des Differentiirens anzeigt, nämlich $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$, so hat man $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = -x^{-2}$. Betrachtet man zuerst $\frac{dy}{dx}$ als die zu suchende Function, so erhält man, da der Differentialquotient derselben $-x^{-2}$ ist, durch Integration $\frac{dy}{dx} = x^{-1}$, oder indem man in gewöhnlicher Weise die Gleichung mit isolirten Differentialen schreibt $\partial\left(\frac{dy}{dx}\right) = -x^{-2}dx$, hat man $\frac{dy}{dx} = \int -x^{-2}dx = x^{-1}$. In der Gleichung $\frac{dy}{dx} = x^{-1}$ ist nun y die zu suchende Function, und man erhält, da x^{-1} bekanntlich der Differentialquotient des natürlichen Logarithmus von x ist, $y = \log x$.

Handelt es sich bei der Integration nicht blos um den abstracten Zusammenhang von ursprünglichen und durch Differentiation ableitbaren Functionen, sondern sollen die Gesetze der Abhängigkeit von Größen, deren zweiten Differentialquotienten man auf irgend eine Weise direct bestimmt hat, durch Integration gefunden werden, in welchem Falle die Frage nach der Uebereinstimmung des Werthes der abhängig Veränderlichen mit dem Werth der durch Integration erhaltenen Formel entsteht, so ist, da man zweimal eine Function zu integriren hat, auch zweimal die Constante zu bestimmen. Es sei allgemein $f(x)$ als der zweite Differentialquotient einer abhängig Veränderlichen y gegeben durch die Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} = fx$ oder $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = fx$. Bil-

det man daraus die Gleichung $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = fx \cdot dx$ und $\frac{dy}{dx} = \int fx dx$, so muß man, da $\frac{dy}{dx}$ zunächst als die abhängig Veränderliche erscheint, um die Constante zu bestimmen, den Werth wissen, den $\frac{dy}{dx}$ für irgend einen einzelnen Werth von x annimmt. Die dadurch bestimmte Constante möge C heißen, und wir erhalten die Gleichung $\frac{dy}{dx} = \int fx dx + C$, oder, wenn wir unter F(x) diejenige Function vorstellen, deren Differentialquotient f(x) ist, die Gleichung $\frac{dy}{dx} = F(x) + C$. Durch abermalige Integration erhalten wir aus der Gleichung $dy = F(x) dx + C dx$ die Gleichung $y = \int F(x) dx + Cx$. Um für diese Integration die Constante zu bestimmen, müssen wir den Werth wissen, den y für irgend einen Werth von x annimmt. Stellen wir die durch Kenntniß dieses Werthes bestimmte Constante durch Cj vor, so haben wir $y = \int F(x) dx + Cx + Cj$. Wenn wir F(x) wieder durch f(x) ausdrücken, indem wir $\int f(x) dx$ statt F(x) setzen, so erhalten wir $y = \int (\int fx dx) dx + Cx + Cj$ als die aus der Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$ durch zweimalige Integration hervorgehende Gleichung. Wir sehen also, daß man für irgend einen beliebigen Werth von x den zugehörigen Werth von $\frac{dy}{dx}$ und ebenso für irgend einen Werth von x den zugehörigen Werth von y wissen muß, um aus dem gegebenen zweiten Differentialquotienten einer abhängig Veränderlichen dieselbe vollständig zu bestimmen.

Während nun in dem Falle, als der zweite Differentialquotient einer Function von x durch eine Function von x selbst gegeben ist, durchaus keine neuen Regeln nöthig sind, so entsteht doch ein eigenthümliches Gebiet der Integralrechnung dadurch, daß der zweite Differentialquotient einer durch y vorgestellten Function von x auch als Function der abhängig Veränderlichen y oder als Function von $\frac{dy}{dx}$, oder als Function von x und y zugleich, oder von x und $\frac{dy}{dx}$ oder von y und $\frac{dy}{dx}$ zugleich, oder endlich als Function der drei Größen x, y und $\frac{dy}{dx}$ gegeben sein kann. In allen diesen Fällen muß, ehe von Integration die Rede sein kann, die Gleichung so umgeformt werden, daß man entweder auf beiden Seiten der Gleichung eine Function einer Veränderlichen multiplicirt mit dem Differential derselben Veränderlichen hat, d. h. daß man auf beiden Seiten das Differential einer Function Einer der Veränderlichen hat, in welchem Falle dann nach den gewöhnlichen Regeln der Integration die Integrale beider Seiten der Gleichung genommen und untereinander gleichgesetzt werden, oder daß man auf jeder Seite der Gleichung wenigstens das Differential einer Function hat, mag nun diese Function noch aus zwei Veränderlichen zusammengesetzt erscheinen oder nicht.

Um nur im Allgemeinen eine Vorstellung zu geben von diesen Umformungen der Differentialgleichungen und von diesem Gebiet der Integralrechnung, welches zu erschöpfen nicht in unserer Absicht liegt, wollen wir blos den Einen Fall betrachten, in welchem der zweite Differentialquotient einer abhängig Veränderlichen als Function dieser abhängig Veränderlichen selbst gegeben ist, oder in welchem aus der Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} = f(y)$ die Gleichung zwischen

x und y zu suchen ist. Wir setzen zuerst $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = f(y)$ oder $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = f(y) \,.\, dx$. Die rechte Seite dieser Gleichung kann in dieser Form nicht als das Differential einer Function von y betrachtet werden, weil f(y) nicht mit dy, sondern mit dx multiplicirt erscheint. Multipliciren wir aber beide Seiten der Gleichung mit $\frac{dy}{dx}$, so erhalten wir $\frac{dy}{dx} \,.\, d\left(\frac{dy}{dx}\right) = f(y)\,dy$. Auf der linken Seite der Gleichung ist jetzt die unter $\frac{dy}{dx}$ vorgestellte Veränderliche multiplicirt mit dem Differential dieser Veränderlichen, und auf der rechten Seite ist ebenfalls eine Function einer Veränderlichen mit dem Differential dieser Veränderlichen multiplicirt. Aus beiden Seiten der Gleichung läßt sich also nach den gewöhnlichen Regeln das Integral nehmen; nur daß hier, wo die Function der Veränderlichen y unbestimmt gelassen ist, das Integral sich nur andeuten läßt. Der Ausdruck $\frac{dy}{dx}\, d\left(\frac{dy}{dx}\right)$ ist bekanntlich das Differential von $\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2}$, und wir haben also $d\left[\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2}\right] = f(y)\,dy$ oder $\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2} = \int f(y)\,dy$. Um die Constante zu bestimmen, muß man für irgend einen Werth von y den zugehörigen Werth von $\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2}$ als der abhängig Veränderlichen wissen, und dann bei dieser Constantenbestimmung verfahren wie gewöhnlich. Stellen wir diese Constante durch C vor, so erhalten wir:

$$\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2} = \int f(y)\,dy + C \text{ oder } \frac{dy}{dx} = \sqrt{2[\int f(y)\,dy + C]}.$$

Um auf diese letzte Gleichung die Integration anwenden zu können und dadurch die Gleichung zwischen x und y herzuleiten, müssen wir sie in der Form $\frac{1}{\sqrt{2[\int f(y)\,dy + C]}} \,.\, dy = dx$ schreiben, wodurch eine Function der Veränderlichen y mit dem Differential dieser Veränderlichen multiplicirt erscheint. Indem man auf der linken Seite der Gleichung auf gewöhnliche Weise das Integral als eine Function von y darstellt, erhält man in der Gleichung $\int \frac{1}{\sqrt{2[\int fy\,dy + C]}} \,.\, dy = x$ die gesuchte Gleichung zwischen x und y. Um für diese letzte Integration die Constante zu bestimmen, muß man den Werth wissen, welchen die Veränderliche x für irgend einen Werth von y annimmt.

Wir wollen, um den aufgestellten abstracten Formeln etwas Leben einzuhauchen, diese Klasse von Aufgaben noch durch ein angewandtes Beispiel erläutern. Wir nehmen an, ein frei beweglicher Körper habe im Punkt c (Fig. 58) seine Gleichgewichtslage, und er werde, sobald er sich aus dieser Lage entfernt hat, in die Gleichgewichtslage zurückgetrieben durch eine Kraft, welche um so stärker wirkt, je größer die Ausweichung aus der Gleichgewichtslage ist, welcher Fall z. B. statthat, wenn in einem elastischen Medium irgend ein Theil aus seiner Gleichgewichtslage, in welcher die abstoßenden Kräfte nach allen Richtungen gleich sind, herausgetreten ist. Unter der gemachten Voraussetzung muß der Körper eine in einer geradlinigten Bahn ab hin- und hergehende Bewegung annehmen, weil er immer mit einer bestimmten Geschwindigkeit in der Gleichgewichtslage ankommt, und über dieselbe hinausschreitet, bis durch die der vorhandenen Geschwindigkeit entgegenwirkende Kraft seine Geschwindigkeit auf Null gebracht ist, und er nun mit zunehmender Geschwindigkeit wieder der Gleichgewichts-

lage zueilt. Es soll der Ort berechnet werden, in welchem der oscillirende Körper sich zu irgend einer Zeit befindet, wenn man einen Zeitpunkt, in welchem sich der Körper in irgend einem bestimmten Punkt seiner Bahn sich befindet, als den Anfangspunkt der Zeit setzt, d. h. es soll die Gleichung zwischen dem Raum s und der Zeit t bei dieser oscillirenden Bewegung gesucht werden. Unter dem zu suchenden Raum s ist zu verstehen die jedesmalige Entfernung des Körpers von dem Punkt c der Gleichgewichtslage. Setzen wir in den Punkt c den Nullpunkt des Raumes s, so wird, wenn die Ausweichung nach b hin durch eine positive Zahl ausgedrückt ist, die Ausweichung von c nach a hin durch eine negative Zahl ausgedrückt werden müssen. Wir wissen (s. §. 41), daß bei einer geradlinigten Bewegung der erste Differentialquotient von Raum und Zeit die Geschwindigkeit ausdrückt, und daß der zweite Differentialquotient von Raum und Zeit die Beschleunigung der Bewegung, oder was hier bei der Bewegung eines Punktes, wo von keiner Verschiedenheit der Masse die Rede ist, dasselbe ist, die Kraft ausdrückt. Da die Kraft im geraden Verhältniß mit der Ausweichung aus der Gleichgewichtslage, d. h. im geraden Verhältniß mit der Größe s wachsen soll, so wird der zweite Differentialquotient von s und t im Allgemeinen durch die Function $as+b$, und da für $s=o$ auch die Kraft gleich Null sein soll, kurzweg durch as auszudrücken sein. Um über das Vorzeichen von as zu entscheiden, ist noch Folgendes zu bedenken. Die Geschwindigkeit wird überall durch eine positive oder negative Zahl ausgedrückt, je nachdem die mit den Zunahmen der Zeit verbundenen Zunahmen des Raumes durch positive oder negative Zahlen gegeben sind. Es folgt daraus für unsern vorliegenden Fall, daß die Geschwindigkeit des Körpers auf dem ganzen Weg von a nach b einen positiven, und auf dem Weg von b nach a einen negativen Zahlenwerth erhält. Der Ausdruck für die Kraft, als der erste Differentialquotient von Geschwindigkeit und Zeit, hat überall

mit der Geschwindigkeit gleiches Vorzeichen, wenn die Geschwindigkeit sich vergrößert, und entgegengesetztes, wenn die Geschwindigkeit abnimmt. In unserm Falle ist auf dem Weg von c nach b die Geschwindigkeit positiv und abnehmend, folglich die Kraft negativ zu setzen; auf dem Weg von b nach c ist die Geschwindigkeit negativ und zunehmend, folglich die Kraft ebenfalls negativ. So lange sich also der Körper zwischen c und b befindet, d. h. so lange s einen positiven Werth hat, ist der Ausdruck für die Kraft negativ. Auf dem Weg von c nach a ist die Geschwindigkeit negativ und abnehmend, folglich die Kraft positiv; auf dem Weg von a nach c ist die Geschwindigkeit positiv und zunehmend, folglich die Kraft ebenfalls positiv. Zwischen a und c, d. h. für jeden negativen Werth von s ist die Kraft positiv. Da hiernach allgemein der Ausdruck der Kraft immer das entgegengesetzte Vorzeichen von dem jedesmaligen Vorzeichen von s hat, so erhalten wir als die unserer Aufgabe entsprechende Gleichung $\frac{d^2 s}{dt^2} = -as$. Es ist uns also hier der zweite Differentialquotient zweier Veränderlichen s und t als Function der abhängig Veränderlichen s gegeben, und die Gleichung zwischen s und t kann auf dem Wege der im Vorhergehenden enthaltenen allgemeinen Auflösung gefunden werden. Wir wollen, da es uns nicht auf die größte Allgemeinheit der Auflösung ankommt, um die Integration zu vereinfachen, statt a die Zahl 1 setzen, und die Gleichung $\frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt} = -s$ oder $d\left(\frac{ds}{dt}\right) = -s\,.\,dt$ auflösen. Beiderseits mit $\frac{ds}{dt}$ multiplicirt, entsteht die Gleichung $\frac{ds}{dt}\,.\,d\left(\frac{ds}{dt}\right) = -s\,.\,ds$, und durch Integration $\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = -\frac{s^2}{2}$. Um die Constante zu bestimmen, müssen wir für irgend einen Werth von s

den zugehörigen Werth von $\frac{ds}{dt}$ oder von der Geschwindigkeit wissen. Im Punkt a, als der größten Ausweichung aus der Gleichgewichtslage, ist die Geschwindigkeit gleich Null. Drücken wir nun die Länge ac durch eine beliebige Zahl, z. B. durch die Zahl 1 aus, so ist für $s = -1$ die Geschwindigkeit gleich Null. Wir erhalten also nach bekannter (s. §. 74) Regel der Constantenbestimmung $\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = -\frac{s^2}{2} - \left(-\frac{1^2}{2}\right)$ oder $\frac{ds}{dt} = \sqrt{1-s^2}$. Wir konnten die Constante auch dadurch bestimmen, daß wir für den Punkt der Gleichgewichtslage, wo $s = o$ ist, und die Geschwindigkeit ihren größten Werth erreicht, der Geschwindigkeit einen beliebigen Zahlenwerth beilegten. Da die aus der oben gemachten Annahme, daß die Länge ac gleich 1 sei, resultirende Gleichung $\frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{1-s^2}$ zeigt, daß für $s = o$ die Geschwindigkeit gleich ± 1 wird, so hätten wir aus der Gleichung $\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = -\frac{s^2}{2}$ dieselbe Gleichung wie vorher erhalten, wenn wir zum Zwecke der Constantenbestimmung die Annahme gemacht hätten, daß $\frac{ds}{dt} = \pm 1$ sei für $s = o$. Wir würden dann (nach der allgemeinen für die Constantenbestimmung geltenden Formel §. 74) $\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = -\frac{s^2}{2} + \frac{1}{2}(\pm 1)^2 - o$, oder wie vorher $\frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{1-s^2}$ erhalten haben.

Um nun die Gleichung zwischen s und t zu finden, haben wir die letzte Gleichung in der Form $\frac{ds}{\pm\sqrt{1-s^2}} = dt$ zu schreiben, und beiderseits die Integrale zu nehmen. Bekanntlich ist (siehe §. 62) $\int\frac{ds}{\pm\sqrt{1-s^2}}$ nach Belieben gleich

Arc (sin = x) oder gleich Arc (cos = x), jenachdem wir das positive oder negative Vorzeichen im Nenner nehmen. Beide Functionen müssen also der Aufgabe Genüge leisten. Nur wird es einer verschiedenen Constantenbestimmung bedürfen, jenachdem bei beliebig angenommenem Anfangspunkt der Zeit die eine oder die andere Function der Aufgabe genügen soll. Nehmen wir also zuerst den negativen Werth von $\sqrt{1-s^2}$, so erhalten wir aus der Gleichung $\frac{ds}{-\sqrt{1-s^2}} = dt$ durch beiderseitige Integration Arc(cos = s) = t. Die Zeit t möge gerechnet werden von dem Moment, wo der Körper im Punkt a ist, so daß wir also für $s = -1$ haben $t = o$. Mithin wird Arc (cos = s) — Arc (cos = — 1) = t, oder Arc (cos = s) — $\pi = t$. Folglich ist $s = \cos(t + \pi)$ oder $s = -\cos t$. Hätten wir den positiven Werth von $\sqrt{1-s^2}$ genommen, so wäre aus der Gleichung $\frac{ds}{+\sqrt{1-s^2}} = dt$ zunächst erhalten worden Arc (sin = s) = t. Nehmen wir den Anfangspunkt der Zeit wie vorher in dem Augenblick, wo der Körper in dem Punkt a ist, und haben wir also wieder $t = o$ für $s = -1$, so erhalten wir durch Constantenbestimmung Arc (sin = s) — Arc (sin = — 1) = t oder Arc (sin = s) — $\frac{3\pi}{2} = t$; folglich $s = \sin\left(t + \frac{3\pi}{2}\right)$, oder $s = -\cos t$, wie vorher. Hiermit haben wir die aus der ursprünglich gegebenen Gleichung $\frac{d^2 s}{dt^2} = -s$ abzuleitende Gleichung zwischen Raum und Zeit, und sehen, daß unter den beiden Voraussetzungen, daß die größte Ausweichung durch die Zahl 1 ausgedrückt und der Anfangspunkt der Zeit in dem angegebenen Punkt genommen wird, der Raum s oder die Entfernung aus der Gleichgewichtslage gegeben ist durch den Cosinus des jedesmaligen Zahlenwerthes der Zeit, und zwar diesen Cosinus mit dem entgegengesetzten Zeichen genommen.

Für einen andern Anfangspunkt der Zeit müßte natürlich auch der Raum durch eine andere Function der Zeit ausgedrückt erscheinen. Setzen wir z. B. den Anfangspunkt der Zeit in den Augenblick, in welchem der Körper in der Gleichgewichtslage ist, so haben wir für $t=o$ auch $s=o$. An den aus der Gleichung $\frac{ds}{\pm\sqrt{1-s^2}}=dt$ abgeleiteten beiden Gleichungen $\mathrm{Arc}(\cos=s)=t$ und $\mathrm{Arc}(\sin=s)=t$ wird natürlich nichts geändert. Durch Constantenbestimmung erhält man aus denselben die Gleichungen $\mathrm{Arc}(\cos=s)-\mathrm{Arc}(\cos=o)=t$ und $\mathrm{Arc}(\sin=s)-\mathrm{Arc}(\sin=o)=t$. In der Bestimmung $s=o$ liegt aber in Betreff des Anfangspunktes der Zeit eine Zweideutigkeit, indem dieser Anfangspunkt in dem Moment genommen sein kann, wo s aus negativen Werthen in positive übergeht, oder in demjenigen, in welchem s aus positiven in negative Werthe übergeht. Nehmen wir den ersten Fall an, so wird, wenn wir in $\mathrm{Arc}(\cos=s)$ und in $\mathrm{Arc}(\sin=s)$ die Zahl $s=o$ setzen, $\mathrm{Arc}(\cos=o)=\frac{3\pi}{2}$ und $\mathrm{Arc}(\sin=o)=o$. Die beiden obigen Gleichungen sind also $\mathrm{Arc}(\cos=s)-\frac{3\pi}{2}=t$ und $\mathrm{Arc}(\sin=s)=t$. Aus beiden geht dieselbe Gleichung $s=\sin t$ hervor. Nehmen wir den zweiten Fall, daß s den Nullwerth hat bei seinem Uebergang aus positiven Werthen in negative, so ist $\mathrm{Arc}(\cos=o)=\frac{\pi}{2}$ und $\mathrm{Arc}(\sin=o)=\pi$. Es entstehen also die Gleichungen $\mathrm{Arc}(\cos=s)-\frac{\pi}{2}=t$ und $\mathrm{Arc}(\sin=s)-\pi=t$. Aus beiden geht die Gleichung $s=-\sin t$ hervor.

Neuntes Capitel.

Vom dritten und den folgenden Differentialquotienten.

§. 115.

Gleichmäßig wachsende Beschleunigung des Wachsens.

Veränderliche Größen, bei denen mit gleichen Zunahmen der Einen ungleiche Unterschiede der Zunahmen der Andern verbunden sind, haben eine ungleichförmige Beschleunigung oder Retardation des Wachsens oder Abnehmens, und zwar muß, je nachdem diese Unterschiede der Zunahmen immer größer oder kleiner werden, eine zunehmende oder abnehmende Beschleunigung des Wachsens stattfinden. Die erste hierbei sich darbietende Frage, wie man den momentanen Größenwerth einer veränderlichen Beschleunigung des Wachsens berechnen kann, ist bereits in dem vorhergehenden Capitel beantwortet. Daselbst wurde die Ungleichheit der Unterschiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen nur in sofern in Betracht gezogen, als aus derselben der Begriff der stetigen Veränderung der Beschleunigung des Wachsens hergeleitet wurde, nicht aber in sofern, daß die Vergrößerung oder Verkleinerung der Unterschiede der Zunahmen ihrem Werthe nach ins Auge gefaßt und bestimmt worden wäre. Es entsteht nun die neue Frage, wie man bei veränderlicher Beschleunigung des Wachsens den Größenwerth dieser Veränderung der Beschleunigung des Wachsens bestimmen kann, oder wie man für das Wachsen oder Abnehmen der Beschleunigung des Wachsens ein bestimmtes Maß festsetzen, und vermittelst desselben die Stärke dieses Wachsens oder Abnehmens angeben und berechnen kann. Wir haben demgemäß jetzt auf die Größenwerthe, um

welche die Unterschiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen zu- oder abnehmen, unser Augenmerk zu richten, wobei die willkürlich Veränderliche fortwährend wie früher als durch lauter gleiche Incremente wachsend angenommen wird.

Eine bestimmte und deutliche Vorstellung von der Größe der Veränderung der Beschleunigung des Wachsens können wir unmittelbar natürlich nur in dem Falle haben, in welchem die Unterschiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen immer um gleich viel größer oder kleiner werden, oder in welchem die Größe der Veränderung der Beschleunigung des Wachsens constant ist, weil nur in diesem Falle die Vergleichung der Zunahmen der willkürlich Veränderlichen mit den Zunahmen, welche die Unterschiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen annehmen, ein bestimmtes Resultat liefern kann. So habe ich z. B. von der Größe der Veränderung einer Beschleunigung des Wachsens eine ganz bestimmte Vorstellung, wenn ich weiß, daß mit gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen im Werthe von 1 solche Zunahmen der abhängig Veränderlichen verbunden sind, daß die Unterschiede derselben immer um 3 größer werden. Das Wachsen derjenigen Größen, bei welchen mit allen gleichen selbst beliebig kleinen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen gleiche Zunahmen der Unterschiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen verbunden sind, nennen wir eine gleichmäßig wachsende Beschleunigung des Wachsens. Da bei Größen der Art mit gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen wieder gleiche Zunahmen verbunden sind, nämlich gleiche Zunahmen der Unterschiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen, so kann man diese Größen als eine Art gleichmäßig wachsender, und zwar als im dritten Grad gleichmäßig wachsende Größen betrachten, und wir wollen sie auch so nennen, wie man entsprechend diejenigen, bei welchen die Zunahmen der Zunahmen der abhängig Veränderlichen gleich sind, gleichmäßig Wachsende im zweiten Grad, und endlich diejenigen, bei welchen die Zunahmen der abhängig Veränder-

lichen gleich sind, die wir bisher gleichmäßig Wachsende schlechthin genannt haben, gleichmäßig Wachsende im ersten Grad nennen könnte.

Um ein Beispiel von Größen zu geben, bei welchen die Beschleunigung des Wachsens gleichmäßig wächst oder welche gleichmäßig wachsend im dritten Grad sind, so sei die abhängig Veränderliche ausgedrückt durch die Function $\frac{1}{12}x^3$. Lassen wir die Zahl x vom Nullwerth aus mehrmals um die Zahl 1 wachsen, so daß x der Reihe nach die Zahlenwerthe 1, 2, 3, 4, 5 annimmt, so sind die zugehörigen Werthe der Function $\frac{1}{12}x^3$ der Reihe nach $\frac{1}{12}, \frac{8}{12}, \frac{27}{12}, \frac{64}{12}, \frac{125}{12}$. Ziehen wir jeden Werth der Function von dem nachfolgenden ab, so sind die Reste $\frac{7}{12}, \frac{19}{12}, \frac{37}{12}, \frac{61}{12}$ die Zunahmen der Function. Die Unterschiede dieser Zunahmen sind $\frac{12}{12}, \frac{18}{12}, \frac{24}{12}$ und von denselben ist jeder folgende um dieselbe Zahl $\frac{6}{12}$ größer als der vorhergehende. Um uns zu überzeugen, daß bei dieser Function allgemein mit beliebigen gleichen Zunahmen des x gleiche Zunahmen der Unterschiede der Zunahmen der Functionswerthe verbunden sind, und um zugleich zu sehen, auf welche Weise die letztgenannten Zunahmen von der Größe der Zunahmen des x abhängen, brauchen wir nur das x um eine allgemein ausgedrückte Zunahme Δx wachsend zu denken. Wir müssen aber das x dreimal um die Zunahme Δx wachsend annehmen, weil nur aus drei aufeinander folgenden Werthen der Zunahmen der Function entnommen werden kann, um wie viel der Eine Unterschied zweier Zunahmen der Function größer ist als der Andere. Ertheilen wir also in der Function $\frac{1}{12}x^3$ der will-

kürlich Veränderlichen der Reihe nach die Werthe x, $(x+\Delta x)$, $(x+2\Delta x)$, $(x+3\Delta x)$, so sind die zugehörigen Werthe der Function gegeben durch $\frac{1}{12}x^3$, $\frac{1}{12}(x+\Delta x)^3$, $\frac{1}{12}(x+2\Delta x)^3$, $\frac{1}{12}(x+3\Delta x)^3$, oder nach Ausführung der vorgeschriebenen Potenzirung durch

$$\frac{1}{12}x^3,$$
$$\frac{1}{12}x^3+\frac{3}{12}x^2\Delta x+\frac{3}{12}x(\Delta x)^2+\frac{1}{12}(\Delta x)^3,$$
$$\frac{1}{12}x^3+\frac{6}{12}x^2\Delta x+\frac{12}{12}x(\Delta x)^2+\frac{8}{12}(\Delta x)^3,$$
$$\frac{1}{12}x^3+\frac{9}{12}x^2\Delta x+\frac{27}{12}x(\Delta x)^2+\frac{27}{12}(\Delta x)^3.$$

Wird jeder Werth der Function von dem darauffolgenden abgezogen, so erhalten wir in den Ausdrücken

$$\frac{3}{12}x^2\Delta x+\frac{3}{12}x(\Delta x)^2+\frac{1}{12}(\Delta x)^3,$$
$$\frac{3}{12}x^2\Delta x+\frac{9}{12}x(\Delta x)^2+\frac{7}{12}(\Delta x)^3,$$
$$\frac{3}{12}x^2\Delta x+\frac{15}{12}x(\Delta x)^2+\frac{19}{12}(\Delta x)^3,$$

die drei Zunahmen der Function. Die beiden Unterschiede dieser aufeinanderfolgenden Zunahmen sind

$$\frac{6}{12}x(\Delta x)^2+\frac{6}{12}(\Delta x)^3$$
$$\frac{6}{12}x(\Delta x)^2+\frac{12}{12}(\Delta x)^3.$$

Von diesen Unterschieden ist der folgende um $\frac{6}{12}(\Delta x)^3$ größer als der vorhergehende. Wir sehen also, daß bei der vorliegenden Function für beliebige gleiche Zunahmen Δx der willkürlich Veränderlichen die Zunahmen der Unterschiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen im=

mer gleich ausfallen, und zugleich im cubischen Verhältniß von Δx wachsen und abnehmen.

Es entsteht nun bei Größen mit gleichmäßig wachsender Beschleunigung des Wachsens erstens die Frage nach einem von der zufälligen Größe des Δx unabhängigen Maß dieser im dritten Grad constanten Stärke des Wachsens, zweitens nach der allgemeinen Function, in welcher alle im dritten Grad gleichmäßig Wachsende befaßt werden können, und endlich nach den möglichen verschiedenen Arten dieses Wachsens, welche offenbar mannichfaltiger sind als die Arten des im zweiten oder ersten Grad gleichmäßigen Wachsens, indem entweder die Beschleunigung des Wachsens eine zunehmende oder abnehmende, oder die Retardation des Wachsens eine zunehmende oder abnehmende, und ebenso die Beschleunigung oder Retardation des Abnehmens eine zunehmende oder abnehmende sein kann. Wenn wir nun in der Weise, wie es bei den vorhergehenden niederen Graden des Wachsens geschehen ist, die Beantwortung dieser Fragen blos durch Benutzung der Lehrsätze über die arithmetische Reihe der ersten Ordnung geben, und die Untersuchung für diesen dritten Grad wie für jeden folgenden einzelnen Grad des gleichmäßigen Wachsens besonders ausführen wollten, so würden mannichfache Weitläufigkeiten und Schwerfälligkeiten in der Behandlung dieser Fragen nicht zu vermeiden sein. Da nun aber bei Größen, welche im dritten Grad gleichmäßig wachsen, die den gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen zugehörigen Zunahmen der abhängig Veränderlichen eine arithmetische Reihe der zweiten Ordnung bilden, indem die Unterschiede dieser Zunahmen immer um gleichviel größer oder kleiner werden, und da ebenso, wie leicht im Voraus zu denken, Größen, bei welchen die Zunahmen eine arithmetische Reihe der dritten oder vierten Ordnung u. s. w. bilden, als die gleichmäßig Wachsenden von den folgenden höheren Graden zu betrachten sein werden, weil man bei ihnen zuletzt auf gleiche Zunahmen und auf eine feste gleichbleibende Regel des Wachsens geführt

wird, so ist leicht zu sehen, daß durch Benutzung der Lehren über die arithmetischen Reihen der verschiedenen Ordnungen die Aufstellung der Gesetze und Eigenschaften der in höheren Graden gleichmäßig wachsenden Größen sehr erleichtert und vereinfacht werden kann. Wir wollen daher, da wir eine Bekanntschaft mit diesem Gegenstand nicht bei allen unsern Lesern voraussetzen zu dürfen glauben, zunächst Einiges über die Reihen im Allgemeinen und über die arithmetischen Reihen der verschiedenen Ordnungen insbesondere als Hülfslehren für die folgende allgemeine Untersuchung der Natur des Wachsens in allen Graden hier einschalten.

§. 116.

Allgemeine Lehrsätze über die Reihen.

Nehmen wir an, daß wir eine nach irgend einem ganz beliebigen Gesetz gebildete fortschreitende Reihe von Größenwerthen haben. Am einfachsten kann man sich eine solche Reihe dadurch entstanden denken, daß man die willkürlich Veränderliche irgend einer Function um gleiche Theile wachsen läßt, und die zugehörigen Werthe der Function berechnet, welche dann jedenfalls eine gesetzmäßige Reihe bilden, weil die Natur der Function selbst ein für alle Glieder gleichbleibendes Bildungsgesetz der Reihe abgibt. Es möge y irgend eine Function von x vorstellen, und es seien die mit gleichen Zunahmen von x verbundenen successiven Werthe der Function ausgedrückt durch y_0 y_1 y_2 y_3 u. s. w. In der gesetzmäßigen Reihe

$$y_0 \; y_1 \; y_2 \; y_3 \; y_4 \cdots\cdots\cdots y_{n-1} \; y_n$$

mit einer unbestimmten Anzahl von $n+1$ Gliedern, soll das nach dem Anfangsglied folgende Glied y_1 das erste, das nächste y_2 das zweite Glied der Reihe u. s. w. heißen, so daß die jedem y als Stellenzeiger beigefügte Zahl angibt, als das wievielte Glied der Reihe jedes y zu betrachten ist. Das Anfangsglied selbst kann man diesem entsprechend das 0te Glied nennen.

Wir wollen bei dieser Betrachtung der Reihen hauptsächlich zwei Punkte ins Auge fassen, nämlich die Bestimmung der Differenzen der Glieder der Reihe durch die einzelnen Glieder der als gegeben betrachteten Reihe, und die Bestimmung der Glieder der Reihe durch die als gegeben betrachteten Differenzen der Reihenglieder, und erörtern zunächst den ersten der angegebenen Punkte. Indem wir jedes Glied der obigen Reihe von dem darauffolgenden abziehen, erhalten wir die Zunahmen der Function, welche sich in folgender Reihe darstellen.

$$y_1 - y_0,\ y_2 - y_1,\ y_3 - y_2,\ y_4 - y_3, \ldots\ldots y_n - y_{n-1}.$$

Diese Reihe der Zunahmen heißt die erste Differenzenreihe. Indem wir ferner jede vorhergehende Zunahme von der folgenden abziehen, erhalten wir die Reihe der Unterschiede der Zunahmen der Function. Dieselbe ist folgende

$$y_2 - 2y_1 + y_0,\ y_3 - 2y_2 + y_1,\ y_4 - 2y_3 + y_2, \ldots\ldots y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2},$$

und heißt die zweite Differenzenreihe der ursprünglichen Reihe. Um die dritte Differenzenreihe zu bilden, haben wir jedes Glied der zweiten Differenzenreihe von dem darauffolgenden Glied abzuziehen. Nach Ausführung dieser Subtraction und gehöriger Zusammenziehung der gleichartigen Theile, stellen sich die Glieder der dritten Differenzenreihe in folgender Form dar

$$y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0,\ y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1, \ldots\ldots y_n - 3y_{n-1} + 3y_{n-2} - y_{n-3}.$$

Daß die Glieder der vierten Differenzenreihe, entstanden durch Abziehung eines jeden Gliedes der dritten Differenzenreihe von dem nachfolgenden, zusammengesetzt sein müssen nach Art der beiden folgenden Glieder

$$y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0,\ y_5 - 4y_4 + 6y_3 - 4y_2 + y_1,$$

davon kann man sich durch wirkliche Ausführung der vorgeschriebenen Subtraction leicht überzeugen.

Betrachten wir die Glieder der successiven Differenzenreihen, so sehen wir, daß zur Bildung eines Gliedes der ersten Differenzenreihe die Kenntniß von zwei Gliedern der

ursprünglichen Reihe vorausgesetzt wird. Zur Bildung eines jeden Gliedes der zweiten Differenzenreihe braucht man drei Glieder der ursprünglichen Reihe, und so fort für jede folgende Differenzenreihe ein Glied mehr. Es fragt sich nur noch, welches Gesetz die Coefficienten der einzelnen Theile, aus denen die Glieder der successiven Differenzenreihen zusammengesetzt sind, haben. Man übersieht sogleich, daß die Coefficienten der Theile, aus denen z. B. ein Glied der dritten Differenzenreihe zusammengesetzt ist, mit den Binomialcoefficienten der dritten Potenz, und ebenso die Coefficienten der einzelnen Theile eines beliebigen Gliedes der vierten Differenzenreihe mit den Binomialcoefficienten der vierten Potenz zusammenfallen, und kann, ohne sich hierüber in einen weitläufigen Beweis einzulassen, aus den vorliegenden Fällen und aus dem ganz conformen Bildungsgesetz der Glieder der folgenden Differenzenreihen, durch Induction den sicheren Schluß ziehen, daß die Coefficienten der einzelnen Bestandtheile eines Gliedes irgend einer beliebigen Differenzenreihe mit den Binomialcoefficienten der entsprechenden Potenz zusammenfallen. Die Vorzeichen der Coefficienten wechseln regelmäßig ab, und der erste hat immer das Vorzeichen $+$. Das Anfangsglied einer jeden Differenzenreihe enthält als letzten Bestandtheil das Glied y_0 der ursprünglichen Reihe, und ein beliebiges Glied einer jeden Differenzenreihe schließt mit demjenigen Glied der ursprünglichen Reihe, welches ihm in seiner Rangzahl entspricht. Nimmt man zu dem zuletzt Gesagten das vorher angegebene Gesetz der Coefficienten hinzu, so liegt die Regel vollständig vor, nach welcher aus den Gliedern der ursprünglichen Reihe jedes beliebige Glied einer jeden beliebigen Differenzenreihe hergestellt werden kann. So z. B. würde für die oben aufgestellte ursprüngliche Reihe das Anfangsglied der fünften Differenzenreihe gleich sein

$$y_5 - 5y_4 + 10y_3 - 10y_2 + 5y_1 - y_0$$

und etwa das sechste Glied dieser fünften Differenzenreihe gleich

$$y_{11} - 5y_{10} + 10y_9 - 10y_8 + 5y_7 - y_6.$$

Sowie wir nun eine Regel gefunden haben, nach welcher aus einer vom Anfangsglied an gerechneten Anzahl von Gliedern der ursprünglichen Reihe das Anfangsglied jeder beliebigen Differenzenreihe sich darstellen läßt, so können wir auch leicht eine Regel finden, nach welcher umgekehrt aus den Anfangsgliedern der successiven Differenzenreihen ein beliebiges Glied der ursprünglichen Reihe dargestellt werden kann. Um dies nachzuweisen, müssen wir, da jetzt die Glieder der Differenzenreihen und insbesondere ihre Anfangsglieder als das Gegebene betrachtet werden, dieselben nicht wie bisher durch Zusammensetzung aus den Gliedern der ursprünglichen Reihe, sondern durch einfache Zeichen ausdrücken, wobei jedoch diese Bezeichnung so zu bilden ist, daß aus derselben ohne Weiteres entnommen werden kann, das wievielte Glied der wievielten Differenzenreihe durch ein solches Zeichen vorgestellt wird. Es mögen daher, wenn durch y_0 y_1 y_2 y_3 u. s. w. die Glieder der ursprünglichen Reihe vorgestellt werden, die successiven Glieder der ersten Differenzenreihe, als der Reihe der Zunahmen, ausgedrückt sein durch

$$\varDelta y_0 \;\; \varDelta y_1 \;\; \varDelta y_2 \;\; \varDelta y_3 \ldots\ldots \varDelta y_n.$$

Die Reihe der Unterschiede dieser Zunahmen, da sie nur wieder die erste Differenzenreihe der Reihe der Zunahmen ist, wird der eben angewandten Bezeichnung entsprechend auszudrücken sein durch

$$\varDelta\varDelta y_0 \;\; \varDelta\varDelta y_1 \;\; \varDelta\varDelta y_2 \;\; \varDelta\varDelta y_3$$

wofür man zur Abkürzung setzt

$$\varDelta^2 y_0 \;\; \varDelta^2 y_1 \;\; \varDelta^2 y_2 \;\; \varDelta^2 y_3.$$

Nach demselben Princip der Bezeichnung werden die vom Anfangsglied an gerechneten Glieder der dritten Differenzenreihe durch

$$\varDelta^3 y_0 \;\; \varDelta^3 y_1 \;\; \varDelta^3 y_2 \;\; \varDelta^3 y_3$$

vorgestellt werden müssen, und so weiter für die folgenden Differenzenreihen.

Setzen wir nun die für die Anfangsglieder der successiven Differenzenreihen angenommenen Zeichen Δy_0 $\Delta^2 y_0$ $\Delta^3 y_0$ u. s. w. denjenigen Werthen gleich, welche diese Anfangsglieder haben, wenn sie auf die oben angegebene Art durch die Glieder der ursprünglichen Reihe ausgedrückt werden, so erhalten wir folgende Gleichungen

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$
$$\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$$
$$\Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$$
$$\Delta^4 y_0 = y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0$$
$$\Delta^5 y_0 = y_5 - 5y_4 + 10y_3 - 10y_2 + 5y_1 - y_0.$$

In diesen Gleichungen kommen außer dem Anfangsglied so viele Glieder der ursprünglichen Reihe vor, als die Anzahl der Differenzenreihen beträgt, deren Anfangsglieder man hat. Und da die Anzahl der Gleichungen ebenso groß ist, so übersieht man leicht, daß es möglich ist, jedes Glied der ursprünglichen Reihe durch die Anfangsglieder der Differenzenreihen mit Einschluß des Anfangsgliedes der ursprünglichen Reihe auszudrücken, sobald man nur die Anfangsglieder der Differenzenreihen bis zu derjenigen Rangzahl hat, welche mit der Rangzahl des gesuchten Gliedes der ursprünglichen Reihe zusammenfällt. Um das Gesetz dieses Ausdrucks zu finden, brauchen wir nur diese Gleichungen so aufzulösen, daß die Glieder y_1 y_2 y_3 u. s. w. der ursprünglichen Reihe als die gesuchten Größen betrachtet werden, wobei man von den einfacheren Gleichungen zu den zusammengesetzteren fortschreitet, und die durch die ersteren Gleichungen erhaltenen Werthe in die folgenden Gleichungen substituirt. Aus der ersten Gleichung folgt

$$y_1 = \Delta y_0 + y_0.$$

Aus der zweiten Gleichung erhält man

$$y_2 = \Delta^2 y_0 + 2y_1 - y_0$$

und wenn man in diese Gleichung den aus der vorhergehen-

den Gleichung zu entnehmenden Werth von y_1 einführt, so hat man

$$y_2 = \Delta^2 y_0 + 2\Delta y_0 + y_0.$$

Aus der dritten der obigen Gleichungen folgt zunächst

$$y_3 = \Delta^3 y_0 + 3y_2 - 3y_1 + y_0$$

und indem man die soeben für y_2 und y_1 gefundenen Ausdrücke in diese Gleichung einführt, erhält man

$$y_3 = \Delta^3 y_0 + 3\Delta^2 y_0 + 3\Delta y_0 + y_0.$$

Ebenso erhält man aus der vierten der obigen Gleichungen zunächst

$$y_4 = \Delta^4 y_0 + 4y_3 - 6y_2 + 4y_1 - y_0$$

und durch Benutzung der für y_3, y_2 und y_1 gefundenen Ausdrücke

$$y_4 = \Delta^4 y_0 + 4\Delta^3 y_0 + 6\Delta^2 y_0 + 4\Delta y_0 + y_0.$$

Es ist unnöthig, in der Bildung dieser Ausdrücke weiter zu gehen, weil die Regel derselben schon hinlänglich übersichtlich hervortritt. Das vierte Glied y_4 der ursprünglichen Reihe z. B. erscheint als zusammengesetzt aus dem Anfangsglied y_0 der ursprünglichen Reihe und den Anfangsgliedern der vier ersten Differenzenreihen, und die Coefficienten dieser Bestandtheile sind die Binomialcoefficienten der vierten Potenz, wenn man diese Bestandtheile entweder so anordnet, daß man von dem Anfangsglied der vierten Differenzenreihe nach der Rangfolge abwärts geht, und mit y_0 schließt, oder so, daß man mit y_0 anfängt und die Anfangsglieder der Differenzenreihen nach ihrer Rangfolge aufwärts nimmt. Diese Regel ist so einfach, daß man sie ohne Weiteres verallgemeinern und auf jedes Glied der ursprünglichen Reihe ausdehnen kann. Das nte Glied y_n der Reihe y_0 y_1 y_2 u. s. w. u. s. w. würde, in sofern wir nur einige seiner ersten Bestandtheile hinschreiben, gegeben durch die Gleichung

$$y_n = \Delta^n y_0 + \frac{n}{1} . \Delta^{n-1} y_0 + \frac{n(n-1)}{1.2} . \Delta^{n-2} y_0 \ldots\ldots$$

oder wenn wir mit y_0 anfangen, und die Anfangsglieder

der Differenzenreihen aufsteigend nehmen, gegeben durch die Gleichung

$$y_n = y_0 + \frac{n}{1} \cdot \Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{1.2} \cdot \Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \cdot \Delta^3 y_0 \ldots$$

Diese zweite Form der Anordnung der Bestandtheile des Werthes von y_n kommt weit öfter zur Anwendung als die erstere, weil die Reihen häufig von der Art sind, daß die Glieder ihrer höheren Differenzenreihen entweder gleich Null sind, oder doch so klein werden, daß man sie vernachlässigen kann, und man in diesem Falle also nur die Anfangsglieder der niedrigsten Differenzenreihen in den Ausdruck von y_n aufzunehmen hat.

Es versteht sich von selbst, daß man nach der eben aufgestellten Regel auch ein beliebiges Glied irgend einer Differenzenreihe durch das Anfangsglied dieser Differenzenreihe und die Anfangsglieder der nächstfolgenden Differenzenreihen ausdrücken kann, weil jede Differenzenreihe in Bezug auf die nachfolgenden Differenzenreihen als die ursprüngliche Reihe betrachtet werden kann.

Endlich hat es auch keine Schwierigkeit, die Summe einer Anzahl von Gliedern der ursprünglichen Reihe durch das Anfangsglied dieser Reihe und die Anfangsglieder der Differenzenreihen auszudrücken. Setzt man nämlich die aufeinanderfolgenden Glieder der ursprünglichen Reihe ihren durch die Anfangsglieder der Differenzenreihen ausgedrückten Werthen gleich, und stellt man demgemäß folgende Gleichungen auf,

$$\begin{aligned} y_0 &= y_0 \\ y_1 &= y_0 + \Delta y_0 \\ y_2 &= y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0 \\ y_3 &= y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0 \\ y_4 &= y_0 + 4\Delta y_0 + 6\Delta^2 y_0 + 4\Delta^3 y_0 + \Delta^4 y_0, \end{aligned}$$

so sieht man, daß die Summe aller auf der linken Seite der Gleichungen enthaltenen Werthe eben die Summe der Glieder der ursprünglichen Reihe bis zum vierten Gliede ausmacht, und daß dieselbe gleich sein muß der Summe aller auf der rechten Seite der Gleichungen enthaltenen Bestand-

theile. Bezeichnen wir die Summe der Glieder der ursprünglichen Reihe bis zum vierten Gliede durch Sy_4, so erhalten wir durch Addition auf der rechten Seite der Gleichungen,

$$Sy_4 = 5y_0 + 10\Delta y_0 + 10\Delta^2 y_0 + 5\Delta^3 y_0 + \Delta^4 y_0.$$

Diese Summe ist aus den Anfangsgliedern der ursprünglichen Reihe und der aufeinanderfolgenden Differenzenreihen zusammengesetzt, und die Coefficienten dieser nach der Rangfolge der Reihen genommenen Anfangsglieder sind nichts Anderes als die Binomialcoefficienten, mit Ausschluß des ersten Binomialcoefficienten 1, und zwar so, daß bei der Summe der Glieder bis zum vierten die Binomialcoefficienten der fünften Potenz zu nehmen sind, und in ähnlicher Weise für die Summe einer jeden andern Anzahl von Gliedern der Reihe. Die Summe der Glieder bis zum nten Glied, oder Sy_n, wird, wenn wir nur die ersten Bestandtheile derselben hinschreiben, gegeben sein durch die Gleichung

$$Sy_n = (n+1)y_0 + \frac{(n+1)n}{1.2}.\Delta y_0 + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}\Delta^2 y_0 + \ldots$$

§. 117.

Arithmetische Reihen der verschiedenen Ordnungen.

Diejenigen Reihen, bei welchen die Glieder irgend einer der successiven Differenzenreihen sämmtlich unter einander gleich werden, und bei welchen mithin die folgenden Differenzenreihen verschwinden, nennt man im Allgemeinen arithmetische Reihen, und zwar heißen Reihen, bei denen die Glieder der ersten Differenzenreihe gleich sind, arithmetische Reihen der ersten Ordnung, und diejenigen, bei welchen die Glieder der zweiten, oder der dritten u. s. w. Differenzenreihe gleich sind, arithmetische Reihen der zweiten oder dritten Ordnung u. s. w. Die Lehrsätze des vorhergehenden Paragraphen, denen zu Folge ein beliebiges Glied einer Reihe sowol als die Summe der Glieder der Reihe durch die Anfangsglieder der ursprünglichen Reihe und der successiven Differenzenreihen ausgedrückt werden

kann, werden hauptsächlich wichtig und brauchbar durch ihre Anwendung auf die arithmetischen Reihen der verschiedenen Ordnungen, weil es bei diesen Reihen nur eine bestimmte und beschränkte Anzahl von Differenzenreihen gibt, und folglich sowol die Formel für ein ganz beliebiges Glied der Reihe als auch die allgemeine Summenformel der Reihe sich als ein geschlossener Ausdruck mit einer bestimmten Anzahl von Bestandtheilen darstellen wird.

Wir wollen beispielsweise an einigen arithmetischen Reihen diese Berechnungen ausführen. Zur Herstellung einer derartigen Reihe gelangt man am bequemsten, wenn man eine Function vornimmt von solcher Beschaffenheit, daß die mit gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen verbundenen Functionswerthe eine arithmetische Reihe bilden. Wie man diese Functionen selbst zu bilden hat, das wird sich in dem Folgenden bald zeigen. Jetzt nehmen wir sie als zufällig Gegebene. Die Function sei $2x^2+3$. Geben wir dem x der Reihe nach die Werthe 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, so stellen die zugehörigen Functionswerthe folgende Reihe dar:

3 5 11 21 35 53 75 ....

Die erste Differenzenreihe derselben ist

2 6 10 14 18 22.

In der zweiten Differenzenreihe ist jedes Glied gleich 4, und folglich sind die Glieder der folgenden Differenzenreihen sämmtlich gleich Null zu setzen. Wenn wir die allgemeine Formel des vorhergehenden Paragraphen für das nte Glied einer Reihe, nämlich die Formel

$$y_n = y_0 + \frac{n}{1}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 y_0 + \dots$$

auf unsere gegebene Reihe anwenden wollen, so haben wir statt y_0 die Zahl 3, statt Δy_0 die Zahl 2 und statt $\Delta^2 y_0$ die Zahl 4 zu setzen, und die Größen $\Delta^3 y_0$, $\Delta^4 y_0$ u. s. w. sämmtlich gleich Null zu setzen, und das sechste

Glied, z. B. in dieser Reihe wird gegeben sein durch die Gleichung

$$y_6 = 3 + 6.2 + \frac{6.5}{1.2}.4 = 75.$$

Bezeichnen wir das xte Glied unserer Reihe durch y_x, so werden wir die Gleichung

$$y_x = 3 + \frac{x}{1}.2 + \frac{x(x-1)}{1.2}.4$$

oder nach Potenzen von x geordnet

$$y_x = 3 + 2x^2$$

haben. Daß wir hier die Function, von welcher wir bei Bildung der Reihe ausgegangen sind, wieder erhalten, ist nicht zu verwundern, weil der von der willkürlich Veränderlichen erreichte Zahlenwerth x mit der Anzahl der Glieder der Reihe zusammenfallen muß, wenn man, wie wir gethan haben, die willkürlich Veränderliche von Null aus immer um den Zahlenwerth 1 wachsen läßt, und bezüglich auf diese Zunahmen der willkürlich Veränderlichen die Differenzenreihen und ihre Anfangsglieder bestimmt.

Wenden wir die Formel für die Summe der n ersten Glieder einer Reihe

$$Sy_n = (n+1)y_0 + \frac{(n+1)n}{1.2}\varDelta y_0 + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}\varDelta^2 y_0 + \ldots$$

auf unsere Reihe an, und berechnen nach derselben z. B. die Summe der Glieder bis zum sechsten, so erhalten wir

$$Sy_6 = 7.3 + \frac{7.6}{1.2}.2 + \frac{7.6.5}{1.2.3}.4 = 203,$$

welches Resultat durch wirkliche Addition der Glieder der Reihe leicht zu bestätigen ist.

Bilden wir noch eine Reihe durch die successiven Werthe der Function $\frac{1}{2}x^3$. Geben wir dem x der Reihe nach die Zahlenwerthe $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}$ u. s. w., so sind die zugehörigen Werthe der Function

$$0, \frac{1}{16}, \frac{8}{16}, \frac{27}{16}, \frac{64}{16}, \frac{125}{16} \ldots$$

Die Glieder der ersten Differenzenreihe sind

$$\frac{1}{16}, \frac{7}{16}, \frac{19}{16}, \frac{37}{16}, \frac{61}{16},$$

die Glieder der zweiten Differenzenreihe

$$\frac{6}{16}, \frac{12}{16}, \frac{18}{16}, \frac{24}{16},$$

und endlich die Glieder der dritten Differenzenreihe sind constant und gleich $\frac{6}{16}$. Die allgemeinen Ausdrücke y_0, Δy_0, $\Delta^2 y_0$, $\Delta^3 y_0$ haben in der vorliegenden Reihe die Werthe 0, $\frac{1}{16}$, $\frac{6}{16}$, $\frac{6}{16}$. Ein beliebiges Glied der Reihe, z. B. das siebente, wird also gegeben durch die Gleichung

$$y_7 = 0 + 7 . \frac{1}{16} + \frac{7 . 6}{1 . 2} . \frac{6}{16} + \frac{7 . 6 . 5}{1 . 2 . 3} . \frac{6}{16} = \frac{343}{16}.$$

Lassen wir noch in der Function x^3 die willkürlich Veränderliche vom Zahlenwerth -4 aus durch Zunahmen $=1$ wachsen, oder ertheilen wir dem x die Zahlenwerthe -4, -3, -2, -1, -0, $+1$, $+2$ u. s. w., so sind die zugehörigen Werthe der Function

$$-64, -27, -8, -1, 0, +1, +8, +27 \text{ u. s. w.}$$

Die Zahlen

$$+37, +19, +7, +1, +1, +7, +19$$

bilden die erste, die Zahlen

$$-18, -12, -6, 0, +6, +12$$

die zweite, und endlich die Zahlen $+6$, $+6$ u. s. w. die constante dritte Differenzenreihe. Da die Ausdrücke y_0, Δy_0, $\Delta^2 y_0$, $\Delta^3 y_0$ jetzt der Reihe nach die Werthe -64, $+37$, -18, $+6$ haben, so wird z. B. das fünfte Glied der vorliegenden Reihe, welches, wie man sieht, gleich $+1$ ist, gegeben sein durch die Gleichung

$$y_5 = -64 + 5 . 37 - \frac{5.4}{1.2} . 18 + \frac{5.4.3}{1.2.3} 6 = +1.$$

Es mag noch bemerkt werden, daß man ein beliebiges Glied einer Reihe auch vermittelst der Summenformel finden kann, da ja ein Glied einer Reihe betrachtet werden kann als bestehend aus dem Anfangsglied der Reihe und der Summe aller Zunahmen, durch deren Zusetzung jedes folgende Glied der Reihe aus dem vorhergehenden entstanden ist. Diese Zunahmen sind aber nichts Anderes als die Glieder der ersten Differenzenreihe. Jedoch hat man, wenn man das nte Glied einer Reihe auf diesem Wege berechnen will, natürlich in der ersten Differenzenreihe nur die Summe der Glieder bis zum (n—1)ten Glied zu nehmen. Für die erste Differenzenreihe, als ursprüngliche Reihe betrachtet, stellt $\varDelta y_0$ das Anfangsglied, und $\varDelta^2 y_0$ das Anfangsglied der ersten Differenzenreihe u. s. w. vor. Nach der allgemeinen Summenformel ist die Summe der Glieder dieser Reihe bis zum (n—1)ten Glied gleich

$$n\varDelta y_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}.\varDelta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\varDelta^3 y_0 + \ldots..$$

Setzt man zu dieser Summe der Glieder der ersten Differenzenreihe das Anfangsglied y_0 der ursprünglichen Reihe hinzu, so fällt diese Formel mit der für das nte Glied der ursprünglichen Reihe gegebenen Formel zusammen.

Hat man eine arithmetische Reihe einer beliebigen Ordnung nach irgend einer Regel gebildet, und man will die Glieder einer solchen Reihe betrachten als die successiven Werthe einer Function der willkürlich Veränderlichen x, so ist es nicht schwer eine Function von x zu finden, welche dieser Bedingung Genüge leistet. Freilich können viele Functionen von der Beschaffenheit sein, daß ihre mit gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen verbundenen successiven Werthe die Glieder der vorgelegten Reihe liefern. Die Form dieser Function hängt nämlich noch von zwei willkürlichen Annahmen ab. Es muß erstens festgesetzt werden, welchen Werth die Function haben soll für den Nullwerth von x, und zweitens, wie groß die gleichen Zunahmen von x genommen werden sollen, um in den zuge-

hörigen Functionswerthen die Glieder der Reihe darzustellen. Von den Functionen, welche der gegebenen Bedingung genügen, läßt sich diejenige am leichtesten finden, welche für den Nullwerth des x das Anfangsglied der Reihe gibt, und welche der Annahme entspricht, daß die Zunahmen von x gleich 1 gesetzt sind, weil in diesem Falle die für das allgemeine Glied der Reihe aufgestellte Formel unmittelbar die gesuchte Function darbietet. Denn unter den eben gemachten Annahmen fällt der von der willkürlich Veränderlichen wachsend erreichte Zahlenwerth mit der Anzahl der Glieder der Reihe unmittelbar zusammen, und indem man mittelst der für das allgemeine Glied der Reihe geltenden Formel dies allgemeine Glied als Function der Anzahl der Glieder ausdrückt, hat man dasselbe zugleich als Function des jedesmaligen Zahlenwerthes der willkürlich Veränderlichen ausgedrückt.

Es sei z. B. die folgende Reihe

1 3 6 10 15 21 28

gebildet nach der Regel, daß jedes Glied der Reihe die Summe ist von so viel Gliedern der natürlichen Zahlenreihe, als mit Einschluß des Anfangsgliedes die Rangzahl dieses Gliedes angibt, so daß z. B. dasjenige Glied, welches mit Einschluß des Anfangsgliedes das fünfte ist, die Summe der Zahlen von 1 bis 5 enthält. Es soll die Function von x gesucht werden, deren Werthe die Glieder dieser Reihe darstellen in dem Falle, daß man das x immer um die Zahl 1 wachsen läßt, und das Anfangsglied der Reihe dem Functionswerth gleich ist für $x = 0$. Wir haben mithin nur das allgemeine Glied der Reihe als Function der Anzahl der Glieder der Reihe darzustellen. Die erste Differenzenreihe unserer gegebenen Reihe liefert die Zahlen 2, 3, 4, 5, u. s. w. und die Glieder der zweiten Differenzenreihe sind gleich 1. Die allgemeinen Ausdrücke y_0, Δy_0, $\Delta^2 y_0$ erhalten also die Werthe 1, 2, 1. Das xte Glied der Reihe, oder y_x, ist mithin gleich

$$1 + x . 2 + \frac{x(x-1)}{1 . 2} . 1$$

oder nach Potenzen von x geordnet gleich

$$1 + \frac{3}{2} x + \frac{x^2}{2} .$$

Gibt man in dieser Function dem x der Reihe nach die Werthe 0, 1, 2, 3 u. s. w., so erhält man die Glieder der gegebenen Reihe als die Werthe der Function.

Die Glieder der Reihe

$$-64, -27, -8, -1, 0, +1, +8 \text{ u. s. w.}$$

hatten wir oben erhalten als die Werthe der Function x^3, in sofern wir das x vom Zahlenwerth -4 aus immer um 1 wachsen ließen. Wir nehmen an, diese Reihe wäre unmittelbar vorgelegt, und man suchte eine Function von x, deren Werthe diese Reihe darstellen. Wenn wir nach der allgemeinen Formel das xte Glied der Reihe darstellen, so werden wir natürlich nicht die Function x^3, sondern vielmehr eine Function von x erhalten, deren Werthe die Glieder dieser Reihe geben unter der Annahme, daß das x vom Nullwerth aus immer um die Einheit wächst. Die allgemeinen Ausdrücke y_0, Δy_0, $\Delta^2 y_0$, $\Delta^3 y_0$ haben für unsere Reihe die Werthe -64, $+37$, -18, $+6$. Das xte Glied der Reihe, y_x, wird demnach gegeben sein durch die Gleichung

$$y_x = -64 + x . 37 - \frac{x(x-1)}{1 . 2} . 18 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 . 2 . 3} . 6$$

oder nach Potenzen von x geordnet durch

$$y_x = -64 + 48x - 12x^2 + x^3.$$

Die Werthe dieser Function liefern, wie man sieht, die Glieder der gegebenen Reihe, wenn man dem x die Zahlenwerthe 0, 1, 2, 3 u. s. w. beilegt. Wenn wir aber eine Function von x haben wollten, deren Werthe die Glieder unserer Reihe darstellen unter der Annahme, daß das x vom Zahlenwerth -4 aus um Zunahmen $= 1$ wächst, so ist dieselbe leicht aus der gefundenen Function herzuleiten. Denn man sucht eine Function von $\mathfrak{x}$, welche

mit der gegebenen Function gleichen Werth hat, sobald der Zahlenwerth das x in der gesuchten Function um 4 kleiner ist als der Zahlenwerth des x in der gegebenen Function. Setzt man also in die gegebene Function statt x überall $4+x$, so erhält man eine Function von x, welche der an die gesuchte Function gestellten Forderung genügt. Wir setzen also

$$y_x = -64 + 48(4+x) - 12(4+x)^2 + (4+x)^3$$

und erhalten nach Ausführung der vorgeschriebenen Potenzirungen

$$y_x = x^3$$

und damit diejenige Function, von welcher wir oben bei der Bildung der gegebenen Reihe ausgegangen waren.

Wenn wir noch für die Reihe

$$0, \frac{1}{16}, \frac{8}{16}, \frac{27}{16}, \frac{64}{16}, \frac{125}{16},$$

deren Glieder wir oben erhielten, indem wir in der Function $\frac{1}{2}x^3$ das x vom Nullwerth aus um Zunahmen $=\frac{1}{2}$ wachsen ließen, das xte Glied suchen, so erhalten wir, da y_0 Δy_0 $\Delta^2 y_0$ $\Delta^3 y_0$ die Zahlenwerthe $0, \frac{1}{16}, \frac{6}{16}, \frac{6}{16}$ haben,

$$y_x = 0 + x.\frac{1}{16} + \frac{x(x-1)}{1.2}\cdot\frac{6}{16} + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\cdot\frac{6}{16}$$

oder nach Potenzen von x geordnet

$$y_x = \frac{x^3}{16}.$$

Die Werthe dieser Function liefern die Glieder der vorgelegten Reihe, wenn wir das x vom Nullwerth aus um die Zahl 1 wachsen lassen. Wollten wir aber eine Function von x haben, welche für Zunahmen des x im Werthe von $\frac{1}{2}$ die Glieder unserer Reihe liefert, so ist die gesuchte Function von der Art, daß sie für halb so große Werthe der willkürlich Veränderlichen dieselben Functionswerthe gibt

als die Function $\frac{x^3}{16}$. Wenn wir demnach $2x$ statt x in die gegebene Function setzen, so erhalten wir in $\frac{(2x)^3}{16}$ oder in $\frac{1}{2}x^3$ die gesuchte Function. Man wird hieraus ohne Weiteres entnehmen können, wie man allerwärts zu verfahren hat, um eine Function zu finden, deren successiven Werthe bei einer vorgeschriebenen Größe der Zunahmen der willkürlich Veränderlichen und einem vorgeschriebenen Anfangswerth derselben die Glieder irgend einer vorgelegten arithmetischen Reihe liefern.

§. 118.

Allg. Function der gleichmäßig wachsenden Beschleunigung des Wachsens.

Nach dieser Darstellung einiger allgemeinen Eigenschaften der Reihen kehren wir zurück zu den Größen, bei welchen die Beschleunigung des Wachsens eine gleichmäßig wachsende ist. Da bei Größen dieser Art mit gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen solche Zunahmen der abhängig Veränderlichen verbunden sein sollen, deren Unterschiede immer um gleichviel größer oder kleiner werden (s. §. 115), so bilden die successiven Werthe der abhängig Veränderlichen eine arithmetische Reihe der dritten Ordnung. Es fragt sich also, durch was für eine Function der willkürlich Veränderlichen der Werth einer solchen Größe ausgedrückt erscheinen muß. Wir denken uns die willkürlich Veränderliche vom Nullwerth aus wachsend durch lauter gleiche Incremente im Werth von $\frac{1}{m}$. Der Werth, den die abhängig Veränderliche hat für den Nullwerth der willkürlich Veränderlichen, heiße y_0. Die Größe y_0 ist also das Anfangsglied der Reihe, welche durch die successiven Werthe der abhängig Veränderlichen gebildet wird. Da diese Reihe eine arithmetische Reihe der dritten Ordnung ist, so enthält sie ein Anfangsglied der ersten, der zweiten und der dritten Differenzenreihe, und diese Anfangsglieder

mögen durch Δy_0, $\Delta^2 y_0$ und $\Delta^3 y_0$ vorgestellt sein. Das nte Glied der Reihe, d. h. der Werth der abhängig Veränderlichen, welcher n Zunahmen der willkürlich Veränderlichen entspricht, wird also gegeben sein durch die Formel

$$y_0 + \frac{n}{1}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.\Delta^3 y_0$$

oder nach Potenzen von n, als der Veränderlichen in diesem Ausdruck, geordnet, durch

$$y_0 + \left(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3}\right)n + \left(\frac{\Delta^2 y_0}{2} - \frac{\Delta^3 y_0}{2}\right)n^2 + \frac{\Delta^3 y_0}{6}n^3.$$

Unsere Absicht ist aber nicht, den allgemeinen Werth der abhängig Veränderlichen als Function der Zahl n, d. h. der Anzahl der Glieder einer Reihe zu haben, sondern vielmehr als Function des beliebigen Zahlenwerthes der willkürlich Veränderlichen. Dies Letztere ist aber mit Hülfe der gefundenen Function von n leicht zu erreichen. Denn da bis zum nten Gliede der Reihe n Zunahmen der willkürlich Veränderlichen im Werthe von $\frac{1}{m}$ genommen sind, so ist der Zahlenwerth der willkürlich Veränderlichen, welcher dem aufgestellten Werth der abhängig Veränderlichen zugehörig ist, gleich $\frac{n}{m}$. Wenn wir nun in diesem Werth der abhängig Veränderlichen den zweiten Bestandtheil mit m, den dritten mit m^2 und den letzten mit m^3 multipliciren und zugleich dividiren, so nimmt er folgende Form an:

$$y_0 + m\left[\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3}\right]\frac{n}{m} + m^2\left[\frac{\Delta^2 y_0}{2} - \frac{\Delta^3 y_0}{2}\right]\left(\frac{n}{m}\right)^2$$
$$+ m^3\frac{\Delta^3 y_0}{6}.\left(\frac{n}{m}\right)^3$$

und die abhängig Veränderliche erscheint durch eine Function des Zahlenwerthes $\frac{n}{m}$ der willkürlich Veränderlichen ausgedrückt. Wenn man absieht von der Art, wie die Coefficienten der einzelnen Potenzen von $\frac{n}{m}$ aus den Anfangs-

gliedern der successiven Differenzenreihen zusammengesetzt sind, und nur beachtet, daß diese Coefficienten, sowie die Größe y_0, überhaupt constante Zahlen vorstellen, während $\frac{n}{m}$ die willkürlich Veränderliche ist, so sieht man, daß jede Größe mit gleichmäßig wachsender Beschleunigung des Wachsens gegeben ist durch eine Function des Zahlenwerthes x der willkürlich Veränderlichen von folgender Form

$$a + bx + cx^2 + dx^3.$$

Ehe wir an die Folgerungen gehen, welche aus dieser allgemeinen Function gezogen werden können für die im dritten Grad gleichmäßig wachsenden Größen, wollen wir, um nicht in dem Folgenden bei Betrachtung der in höheren Graden gleichmäßig wachsenden Größen auf diese nämliche Art der Ableitung der allgemeinen Function zurückkommen zu müssen, bei dieser Gelegenheit gleich mitbestimmen, durch welche Functionen der willkürlich Veränderlichen der Werth der abhängig Veränderlichen ausgedrückt erscheinen muß, wenn die durch gleiche Zunahmen der willkürlich Veränderlichen entstehenden Werthe der abhängig Veränderlichen eine arithmetische Reihe von einer höheren als der dritten Ordnung bilden. Es mögen die Werthe der abhängig Veränderlichen zuerst eine arithmetische Reihe der vierten Ordnung bilden. Die willkürlich Veränderliche wachse vom Nullwerth aus um Zunahmen im Werthe von $\frac{1}{m}$. Das Anfangsglied der Reihe sei wieder durch y_0 und die Anfangsglieder der vier ersten Differenzenreihen durch Δy_0, $\Delta^2 y_0$, $\Delta^3 y_0$, $\Delta^4 y_0$ vorgestellt. Das nte Glied der Reihe ist alsdann gleich

$$y_0 + \frac{n}{1}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.\Delta^3 y_0$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}.\Delta^4 y_0$$

oder nach Potenzen von n geordnet, gleich

$$y_0 + \left(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4}\right) n + \left(\frac{\Delta^2 y_0}{2} - \frac{\Delta^3 y_0}{2} + \frac{11 \Delta^4 y_0}{24}\right) n^2 + \left(\frac{\Delta^3 y_0}{6} - \frac{\Delta^4 y_0}{4}\right) n^3 + \frac{\Delta^4 y_0}{24} . n^4.$$

Dieser Ausdruck für das nte Glied der Reihe der Functionswerthe stellt denjenigen Werth der abhängig Veränderlichen vor, welcher dem Werth $\frac{n}{m}$ der willkürlich Veränderlichen zugehörig ist. Wenn wir in diesem Ausdruck den zweiten Bestandtheil mit m, den dritten mit m^2 u. s. w. multipliciren und dividiren, so stellt er sich dar als eine Function des Zahlenwerthes $\frac{n}{m}$ der willkürlich Veränderlichen. Sehen wir dabei ab von der Art der Zusammensetzung der constanten Coefficienten der Potenzen von $\frac{n}{m}$, und stellen wir den beliebigen Zahlenwerth $\frac{n}{m}$ durch x vor, so ist eine im vierten Grad gleichmäßig wachsende abhängig Veränderliche gegeben durch eine Function von der Form

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4.$$

Auf dieselbe Art wird sich beweisen lassen, daß jede abhängig Veränderliche, deren durch gleiche Zunahmen der willkürlich Veränderlichen entstehenden successiven Werthe eine arithmetische Reihe der fünften Ordnung bilden, dargestellt wird durch eine Function von der Form

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5.$$

Allgemein wird eine abhängig Veränderliche, deren successiven Werthe eine arithmetische Reihe irgend einer Ordnung bilden, durch eine endliche Potenzenreihe der willkürlich Veränderlichen ausgedrückt erscheinen, und zwar wird die Rangzahl der höchsten Potenz zusammenfallen mit der Rangzahl derjenigen Differenzenreihe, welche aus gleichen Gliedern besteht. Da nun eine abhängig Veränderliche, deren Werthe eine arithmetische Reihe irgend einer Ordnung bilden, oder bei welcher man zuletzt in einer höheren

Stufe auf lauter gleiche Zunahmen der Functionswerthe geführt wird, immer durch eine endliche Potenzenreihe der willkürlich Veränderlichen ausgedrückt wird, so sieht man, daß nur eine solche Potenzenreihe eine Größe darstellt, bei welcher das Gesetz des Wachsens zur Ruhe und zum Abschluß gelangt, und welche ein über ihren ganzen Verlauf sich gleichmäßig erstreckendes unveränderliches Gesetz des Wachsens hat.

Kehren wir zurück zu der eine jede gleichmäßig wachsende Beschleunigung des Wachsens ausdrückenden allgemeinen Function $a + bx + cx^2 + dx^3$. Da jede Function, deren Werthe eine arithmetische Reihe der dritten Ordnung bilden, als besonderer Fall in dieser allgemeinen Function enthalten ist, so fragt es sich zunächst, ob auch umgekehrt die Werthe dieser Function immer eine arithmetische Reihe der dritten Ordnung bilden, sobald man das x um beliebige gleiche Zunahmen wachsen läßt. Es ist klar, daß man, um hierüber zu entscheiden, nur nöthig hat, den Zuwachs der Unterschiede der Zunahmen der Function allgemein auszudrücken. Zu diesem allgemeinen Ausdruck gelangen wir aber, wenn wir die willkürlich Veränderliche dreimal um die Zunahme Δx wachsen lassen, oder derselben die vier Werthe x, $x + \Delta x$, $x + 2\Delta x$, und $x + 3\Delta x$ beilegen, die zugehörigen Werthe der Function berechnen, und dann durch Abziehung erst die Zunahmen, dann die Unterschiede der Zunahmen, und zuletzt den Zuwachs der Unterschiede der Zunahmen bestimmen. Als Resultat dieser etwas weitschweifigen, übrigens aus dem Vorhergehenden schon geläufigen und deswegen hier nicht weiter auszuführenden Rechnung findet man, daß dieser Zuwachs der Unterschiede der Zunahmen unserer Function gleich ist $6d(\Delta x)^3$. Bezeichnen wir den Zuwachs der Unterschiede der Zunahmen einer Function $f(x)$ als die dritte Differenz der Function durch $\Delta\Delta\Delta f(x)$ oder abgekürzt durch $\Delta^3 f(x)$, so können wir das eben ausgesprochene Resultat auch darstellen durch die analytische Gleichung

$$\Delta^3[a + bx + cx^2 + dx^3] = 6d(\Delta x)^3.$$

Da für dasselbe Δx der Zuwachs der Unterschiede der Zu-

nahmen unserer Function constant ist, so sehen wir, daß dieselbe immer eine im dritten Grad gleichmäßig wachsende Größe ausdrückt. Zugleich sehen wir, daß dieser Zuwachs der Unterschiede der Zunahmen, d. h. die Veränderung der Beschleunigung des Wachsens, nur von dem Coefficient d abhängt, aber nicht von den Coefficienten a, b und c, und daß diese Coefficienten sich also nur beziehen können auf die Stärke des Wachsens und die Beschleunigung des Wachsens der Function. Da der Zuwachs der Unterschiede der Zunahmen oder die dritte Differenz unserer allgemeinen Function im cubischen Verhältniß von $\varDelta x$ ab- und zunimmt, so werden wir, wenn wir diese dritte Differenz durch $(\varDelta x)^3$ dividiren, einen von dem zufälligen Größenwerth des $\varDelta x$ unabhängigen constanten Ausdruck erhalten, welcher dient als Maß für die constante Stärke des Wachsens, mit welcher die Beschleunigung des Wachsens unserer Function sich verändert.

Auf dieselbe Weise, wie in §. 112 gezeigt worden ist, daß die durch die Ausdrücke $\frac{\varDelta^2 fx}{(\varDelta x)^2}$ und $\varDelta \frac{\left(\frac{\varDelta fx}{\varDelta x}\right)}{\varDelta x}$ angedeutete verschiedene Aufeinanderfolge von Operationen auf eine und dieselbe Function von x führt, läßt sich auch zeigen, daß man auf dasselbe Resultat kommt, mag man nun die Function f(x) der durch den Ausdruck $\frac{\varDelta^3 f(x)}{(\varDelta x)^3}$ angedeuteten und in dem Vorhergehenden ausgeführten Folge von Operationen unterwerfen, oder mag man von dem Differenzquotienten $\frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x}$ noch einmal den Differenzquotient und von diesem abermals den Differenzquotient nehmen. Da nun die durch die letztere Folge von Operationen erhaltene Function von x offenbar der dritte Differenzquotient von f(x) ist, so nennt man auch den Ausdruck $\frac{\varDelta^3 f(x)}{(\varDelta x)^3}$, d. h. die Zunahme des Unterschieds der Zunahmen der Function dividirt durch die dritte Potenz der Zu-

nahme des willkürlich Veränderlichen, den dritten Differenzquotienten. Nach dem Vorhergehenden ist für alle im dritten Grad gleichmäßig wachsende Größen der dritte Differenzquotient constant, und die Gleichung $\frac{\varDelta^3 y}{(\varDelta x)^3} = a$ ist für diese Art von Größen ebenso charakteristisch, als es die Gleichung $\frac{\varDelta^2 y}{(\varDelta x)^2} = a$ für die gleichförmig beschleunigt wachsenden Größen, und die Gleichung $\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = a$ für die gleichmäßig wachsenden war. Setzt man $\varDelta x = 1$, so fällt der constante Werth des dritten Differenzquotienten zusammen mit $\varDelta^3 y$, oder mit dem Zuwachs des Unterschiedes der Zunahmen der abhängig Veränderlichen. Die Bedeutung, welche der dritte Differenzquotient $\frac{\varDelta^3 y}{(\varDelta x)^3}$ für das Wachsen der Größen y und x hat, läßt sich mithin am kürzesten aussprechen, wenn man, wie es im gemeinen Leben bei Bezeichnung jeder Art des Wachsens durchaus üblich ist, die willkürlich Veränderliche immer um die Zahl 1 wachsend denkt. Findet sich also der dritte Differenzquotient einer abhängig Veränderlichen gleich a, so heißt dies: *Jeder folgende Unterschied der Zunahmen der abhängig Veränderlichen ist um a größer als der vorhergehende, wenn die willkürlich Veränderliche mehrmals um die Zahl 1 wächst.*

Was die Artunterschiede des Wachsens betrifft, welche dadurch eintreten, daß die Beschleunigung des Wachsens veränderlich gesetzt wird, so sieht man sogleich, daß jede von den vier beim zweiten Differentialquotienten aufgeführten Arten des Wachsens im zweiten Grad, nämlich die Beschleunigung und Retardation des Wachsens und Abnehmens, sowol eine wachsende als eine abnehmende sein kann. Sind z. B. die Zunahmen positiv und ebenso die Unterschiede der Zunahmen, d. h. hat man eine Beschleunigung des Wachsens im engeren Sinne, so können diese Unter-

schiede der Zunahmen sowol größer als kleiner werden. Im ersteren Falle wird man eine zunehmende Beschleunigung des Wachsens haben, und der dritte Differenzquotient wird positiv sein; im zweiten Falle wird man eine abnehmende Beschleunigung des Wachsens und einen negativen dritten Differenzquotienten haben. Ferner sind bei einer Retardation des Wachsens die Zunahmen positiv und die Unterschiede der Zunahmen negativ. Werden diese negativen Unterschiede immer kleiner, so wird man diese Veränderung als eine abnehmende Retardation des Wachsens zu bezeichnen haben. Und da die negativen Unterschiede der Zunahmen nur durch den Zusatz einer positiven Größe kleiner werden können, so wird man in diesem Falle einen positiven dritten Differenzquotienten haben. Werden aber bei einer Retardation des Wachsens die negativen Unterschiede der Zunahmen immer größer, so wird diese Veränderung als eine zunehmende Retardation des Wachsens zu bezeichnen, und der dritte Differenzquotient negativ sein. Ebenso wird die Beschleunigung des Abnehmens eine zunehmende oder abnehmende sein, jenachdem die negativen Unterschiede der Zunahmen größer oder kleiner werden, d. h. jenachdem der dritte Differenzquotient negativ oder positiv wird. Und endlich wird die Retardation des Abnehmens eine zunehmende oder abnehmende sein, jenachdem die dabei stattfindenden positiven Unterschiede der Zunahmen größer oder kleiner werden, d. h. jenachdem der dritte Differenzquotient positiv oder negativ ist.

Aus den Vorzeichen des ersten und zweiten Differentialquotienten, und dem Vorzeichen des dritten Differenzquotienten läßt sich, wie man sieht, leicht beurtheilen, welche von den acht verschiedenen Arten des Wachsens im dritten Grad man vor sich hat. Allgemein wird jede von den vier durch die Vorzeichen des ersten und zweiten Differentialquotienten angezeigten vier Arten des Wachsens im zweiten Grad eine zunehmende sein, wenn der dritte Differenzquotient gleiches Vorzeichen mit dem zweiten Diffe-

rentialquotienten hat, und eine abnehmende, wenn das Vorzeichen des dritten Differenzquotienten dem des zweiten Differentialquotienten entgegengesetzt ist. Wenn wir, wie in dem Vorhergehenden schon häufig geschehen, alle acht Arten des Wachsens im dritten Grad mit einem gemeinschaftlichen Namen als wachsende Beschleunigung des Wachsens bezeichnen, so ist dies Wort im weiteren Sinne zu nehmen.

§. 119.

Construction der im dritten Grad gleichmäßig Wachsenden.

Wir wollen nicht unterlassen auch diejenigen Begriffe, welche sich bei Verfolgung der Natur des Wachsens bis zum dritten Grad dargeboten haben, durch dasselbe Mittel zu erläutern, durch welches man allen abstracten Begriffen der Analysis eine so große Anschaulichkeit und durch dieselbe eine große Sicherheit und Festigkeit geben kann, nämlich durch das Mittel der Versinnlichung derselben an räumlichen Elementen, oder durch die sogenannte Construction. Die Construction der im dritten Grad gleichmäßig wachsenden Größen wird übrigens nicht sowol um ihrer selbst willen oder zur Erläuterung des Begriffs des im dritten Grad gleichmäßigen Wachsens unternommen, als zur Erläuterung des wahren Sinnes der Stärke des Wachsens im dritten Grad, wenn dieselbe stetig veränderlich ist, oder, wie wir später sehen werden, um den momentanen Werth des dritten Differentialquotienten constructiv darzustellen.

Die Raumelemente, welche eine gleichmäßig wachsende Beschleunigung des Wachsens zeigen sollen, mögen zuerst senkrechte Parallelcoordinaten sein. Die Gleichung der Linie, deren Ordinaten im dritten Grad gleichmäßig wachsen, ist im Allgemeinen

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3.$$

Statt der unbestimmten Coefficienten a, b, c, d wollen wir zuerst, um eine bestimmte Linie vorlegen zu können, bestimmte Coefficienten setzen. Es sei die Gleichung

$$y = -3 + \frac{11}{2}x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^3$$

gegeben. Im Punkt a (Fig. 59) habe die Abscisse ki den Nullwerth, und in den Punkten b, c, d, e, f, g, h, i der Reihe nach die Werthe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, sowie im Punkte k den Werth -1. Berechnen wir, um den Lauf der Curve annähernd zu bestimmen, die Ordinaten einer Anzahl von Punkten, so sind gemäß der gegebenen Gleichung die Ordinaten in den Punkten k, a, b, c, d, e, f, g, h, i der Reihe nach gleich $-10\frac{1}{8}$, -3, $+\frac{9}{8}$, $+3$, $+3\frac{3}{8}$, $+3$, $+2\frac{5}{8}$, $+3$, $+4\frac{7}{8}$, $+9$. Wir lassen alle übrigen Eigenschaften dieser krümmen Linie bei Seite, und untersuchen nur ihre Eigenthümlichkeit in Betreff der oben aufgezählten möglichen Arten des Wachsens im dritten Grade. Dazu führt uns, wie wir wissen, die Betrachtung der Vorzeichen des ersten und zweiten Differentialquotienten und des dritten Differenzquotienten der gegebenen Function. Der dritte Differenzquotient einer solchen Function ist, wie früher gezeigt, gleich dem sechsfachen Coefficienten von x^3, also hier gleich $+\frac{3}{4}$. Bei positivem dritten Differenzquotienten werden also von den acht früher unterschiedenen Arten des Wachsens nur vier eintreten können, jenachdem mit einem positiven zweiten Differentialquotienten ein positiver oder negativer erster Differentialquotient verbunden ist, oder mit einem negativen zweiten Differentialquotienten ein positiver oder negativer erster. Um zu entscheiden, welche Art des Wachsens innerhalb eines Intervalles stattfindet, müssen wir untersuchen, innerhalb welcher Intervalle der erste und zweite Differentialquotient positiv und negativ ist. Der zweite Differentialquotient unserer Function ist gleich $\frac{3}{4}x - 3$. Derselbe wird gleich Null für $x = 4$ oder für den Punkt e

der Figur 59. Vor dem Punkt e ist er also negativ und nachher positiv. Im Punkt e geht mithin die Curve aus Concavität in Convexität über. (Wir wollen, beiläufig bemerkt, die Begriffe der Convexität und Concavität nicht darnach bestimmen, ob die Curve der Abscisse ihre erhabene oder ihre hohle Seite zukehrt, weil bei dieser Bestimmung dasselbe Vorzeichen des zweiten Differentialquotienten bald Convexität bald Concavität anzeigt, jenachdem die Ordinaten positiv oder negativ sind, sondern wir wollen überall, wo eine Retardation des Wachsens oder eine Beschleunigung des Abnehmens stattfindet, d. h. wo der zweite Differentialquotient negativ ist, die Curve concav, und wo derselbe positiv ist, die Curve convex nennen, was man geometrisch dadurch bezeichnen kann, daß man die Curve concav nennt, sobald man in der Richtung des Wachsens der Ordinaten fortschreitend auf die hohle Seite der Curve trifft, und convex, sobald man in dieser selben Richtung auf der Ordinate fortschreitend auf die erhabene Seite der Curve trifft.) Um den ersten Differentialquotienten unserer Function, welcher gleich $\frac{3}{8}x^2 - 3x + \frac{11}{2}$ ist, in Bezug auf den Wechsel seines Vorzeichens zu untersuchen, setzen wir denselben gleich Null. Aus der Gleichung $\frac{3}{8}x^2 - 3x + \frac{11}{2} = 0$ folgen für x die beiden Werthe $x = 4 - \frac{2}{\sqrt{3}}$ und $x = 4 + \frac{2}{\sqrt{3}}$. Diese beiden Werthe möge die Abscisse haben in den Punkten m und n der Fig. 59. Wenn wir in der Richtung des Wachsens der Abscisse fortschreiten, so ist der erste Differentialquotient vor dem Punkt m, in welchem er zum ersten Mal gleich Null wird, positiv, und nach demselben negativ, und bleibt negativ, bis er im Punkt n zum zweiten Mal gleich Null wird, und aus negativen Werthen wieder in positive übergeht. In den Punkten m, e und n treten also die Wechsel der Vorzeichen

des ersten und zweiten Differentialquotienten ein, und durch diese Punkte werden die vier Intervalle begrenzt, innerhalb welcher die möglichen vier Arten des Wachsens im dritten Grade stattfinden. Bis zum Punkt m ist der erste Differentialquotient positiv und der zweite negativ, es findet also Retardation des Wachsens statt; und da der dritte Differenzquotient durchaus positiv ist, so hat man bis zum Punkt m eine abnehmende Retardation des Wachsens. Zwischen den Punkten m und e, wo der erste und zweite Differentialquotient negativ ist, und also eine Beschleunigung des Abnehmens stattfindet, ist dieselbe vermöge des positiven dritten Differenzquotienten eine abnehmende. Auf dieselbe Weise findet man durch Combination der Vorzeichen, daß zwischen e und n eine zunehmende Retardation des Abnehmens, und von n an eine zunehmende Beschleunigung des Wachsens stattfindet.

Um die übrigen vier Arten des im dritten Grad gleichmäßigen Wachsens an den Ordinaten einer Curve zu versinnlichen, müssen wir eine Curve mit negativem dritten Differenzquotienten ihrer Ordinaten nehmen. Die Gleichung der Curve sei

$$y = \frac{5}{3} - 3x + 2x^2 - \frac{1}{3}x^3.$$

Um den Lauf der Curve durch einige Punkte annähernd zu bestimmen, so geben wir der Abscisse ag (Fig. 60) in den Punkten a, b, c, d, e, f, g der Reihe nach die Zahlenwerthe -1, 0, $+1$, $+2$, $+3$, $+4$, $+5$, und erhalten die diesen Punkten zugehörigen Ordinaten gleich $7, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}, -5$. Der dritte Differenzquotient der vorliegenden Function ist gleich -2. Der zweite Differentialquotient derselben ist gleich $4-2x$, und wird gleich Null für $x=2$, oder im Punkt d der Abscisse. Vorher ist er positiv und nachher negativ, und die Curve geht im Punkt d aus Convexität in Concavität über. Der erste Differentialquotient, welcher gleich $-3+4x-x^2$ ist, wird

gleich Null für zwei Werthe von x, nämlich für $x = 2 - 1$ und für $x = 2 + 1$, oder in den Punkten c und e der Abscisse. Bis zum Punkte c ist er negativ, von c bis e positiv, und von e aus wieder negativ. Aus der Combination der Vorzeichen der beiden Differentialquotienten mit dem constanten negativen dritten Differenzquotienten wird man leicht entnehmen, daß bis zum Punkte c eine abnehmende Retardation des Abnehmens, zwischen c und d eine abnehmende Beschleunigung des Wachsens, zwischen d und e eine zunehmende Retardation des Wachsens, und endlich von e aus eine zunehmende Beschleunigung des Abnehmens stattfindet.

Um zu übersehen, welche Eigenthümlichkeiten in Betreff des Wachsens allgemein einer jeden Curve, deren Ordinaten im dritten Grad gleichmäßig wachsen, beizulegen sind, untersuchen wir die allgemeine Gleichung

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3.$$

Da man dem x immer einen so großen positiven oder negativen Werth beilegen kann, daß das Glied dx^3 die Summe aller übrigen Glieder übertrifft, so folgt, daß, wenn d positiv ist, bei wachsendem x die Curve zuletzt in einen unendlichen Zweig mit positiven Ordinaten und bei abnehmendem x in einen unendlichen Zweig mit negativen Ordinaten auslaufen muß, und daß, wenn d negativ ist, die Curve nach der Seite des Wachsens von x in einen unendlichen Zweig mit negativen Ordinaten, und nach der Seite des Abnehmens von x in einen unendlichen Zweig mit positiven Ordinaten auslaufen muß. Der zweite Differentialquotient unserer allgemeinen Function ist gleich $2c + 6dx$. Wird derselbe gleich Null gesetzt, so hat das x in dieser Gleichung nothwendig immer Einen reellen Werth, für welchen Werth von x zugleich der zweite Differentialquotient immer sein Vorzeichen wechselt. Mithin hat die Curve immer einen Wendungspunkt, in welchen sie aus Convexität in Concavität oder umgekehrt übergeht. Ob der zweite Differentialquotient in diesem Punkt aus negativen in positive

oder umgekehrt aus positiven in negative Werthe übergeht, das hängt nur von dem Vorzeichen von d ab. Ist d positiv, so hat der zweite Differentialquotient vor seinem Nullwerth negative und nach demselben positive Werthe, und die Curve geht, wie die in Fig. 59 aus Concavität in Convexität über. Ist d negativ, so geht aus denselben Gründen die Curve aus Convexität in Concavität über wie Fig. 60.

Der erste Differentialquotient unserer allgemeinen Function ist $b+2cx+3dx^2$. Bei positivem Werth desselben ist die Ordinate im Wachsen und bei negativem im Abnehmen. Geht er mit Zeichenwechsel durch den Nullwerth, so geht die Ordinate aus dem Wachsen ins Abnehmen oder umgekehrt über. Setzen wir daher den ersten Differentialquotienten gleich Null, so hat die Gleichung $b+2cx+3dx^2=0$ bekanntlich entweder zwei reelle Wurzeln oder gar keine, d. h. die Ordinate geht entweder an zwei Stellen aus dem Wachsen ins Abnehmen oder umgekehrt über, wie bei den Curven Fig. 59 und 60, oder an gar keiner Stelle. Um diesen letzteren Fall durch ein Beispiel zu erläutern, so nehmen wir an, die Gleichung der Curve sei $y=5x-2x^2+\frac{x^3}{3}$. Die dieser Gleichung entsprechende Curve hat ungefähr die Gestalt der Linie afghi Fig. 61, wobei der Nullpunkt der Abscisse in a genommen ist, und die Incremente ab, bc, cd, de sämmtlich gleich 1 gesetzt sind. Der erste Differentialquotient der gegebenen Function ist $5-4x+x^2$. Die Gleichung $5-4x+x^2=0$ gibt keine reellen Werthe von x; der erste Differentialquotient ist vielmehr für alle Werthe von x positiv, und die Ordinate durchaus im Wachsen begriffen. Der zweite Differentialquotient $2x-4$ wird Null für $x=2$, und daher ist im Punkte g der Curve ein Wendungspunkt. Bis zum Punkte g haben die Ordinaten eine abnehmende Retardation des Wachsens und von da an eine zunehmende Beschleunigung des Wachsens, und weitere Unterschiede in der Art

des Wachsens treten nicht hervor. Es mag noch bemerkt werden, daß in dem Falle, in welchem man in der allgemeinen Function $a + bx + cx^2 + dx^3$ die Coefficienten b und c gleich Null setzt, der erste Differentialquotient $3dx^2$ allerdings für nur Einen Werth von x gleich Null wird, nämlich für $x = 0$, aber in diesem Falle ohne Zeichenwechsel durch den Nullwerth hindurchgeht, und folglich auch die Ordinaten nicht aus dem Wachsen ins Abnehmen oder umgekehrt übergehen können, sondern stets wachsend oder abnehmend bleiben, wie z. B. die Ordinaten der Curve Fig. 56, welche nach der Gleichung $y = \frac{1}{4} x^3$ construirt war.

Nachdem wir gesehen haben, daß jedes gleichmäßige Wachsen oder Abnehmen der Beschleunigung oder Retardation des Wachsens oder Abnehmens der Parallelordinaten sich nach Art und Größe leicht construiren läßt, so wollen wir noch kurz die Construction der durch Parallelcoordinaten beschriebenen Flächenräume betrachten, welche im dritten Grad gleichmäßig wachsend sind. Wir wissen, daß die durch die Parallelordinaten einer graden Linie beschriebenen Flächenräume gleichmäßig wachsend im zweiten Grade sind. Es ist früher bei Gelegenheit der Betrachtung dieser Flächenräume der Kürze wegen nur von gleichförmiger Beschleunigung oder Retardation des W a c h s e n s die Rede gewesen. Um aber die vorliegende Untersuchung vollständig zu führen, ist es nöthig, sich über den Begriff der negativen Flächen zu verständigen, und für ein Zunehmen der Abscisse ein Abnehmen des durch die Ordinate beschriebenen Flächenraums nachzuweisen. Wenn wir aus der Coordinatengleichung einer Linie, z. B. der graden Linie, durch Integration die Gleichung für den von den Ordinaten dieser Linie beschriebenen Flächenraum ableiten, so sehen wir, daß diese Gleichung nur in sofern allgemein gültig und auf den gesammten durch positive und negative Ordinaten beschriebenen Flächenraum anwendbar ist, als man die durch nega-

tive Ordinaten beschriebenen Flächenstücke als negative Bestandtheile der Fläche betrachtet. Mithin werden, sobald die Ordinaten negativ sind, mit den Zunahmen der Abscisse negative Zunahmen der Fläche, also ein Abnehmen der Fläche, verbunden sein. Hiernach läßt sich auch die gleichförmige Beschleunigung oder Retardation des Abnehmens der Fläche an den von den Ordinaten einer graden Linie beschriebenen Flächen nachweisen. Sind die Ordinaten der graden Linie im Abnehmen, wie in Figur 53, so werden bei negativen Ordinaten die negativen Flächenzunahmen immer um gleichviel größer, und es wird mithin eine gleichförmige Beschleunigung des Abnehmens der Fläche stattfinden. Sind aber die Ordinaten der graden Linie im Wachsen, so werden bei negativen Ordinaten die negativen Flächenzunahmen immer um gleichviel kleiner, und es wird also eine Retardation des Abnehmens der Fläche stattfinden. Wenn wir diese Unterschiede, welche in der Art des Wachsens der Fläche durch die positiven und negativen Ordinaten hervorgebracht werden, berücksichtigen, so wird es leicht sein, die acht verschiedenen Arten des Wachsens, welche bei im dritten Grad gleichmäßig wachsenden Größen vorkommen, auch an Flächen nachzuweisen.

Eine Fläche, die bezüglich auf eine willkürlich Veränderliche x im dritten Grad gleichmäßig wächst, ist im Allgemeinen auszudrücken durch die Function $a + bx + cx^2 + dx^3$. Soll die Fläche eine durch das Fortrücken der senkrechten Parallelordinaten beschriebene sein, so fällt bekanntlich der erste Differentialquotient der Flächenfunction mit derjenigen Function der Abscisse zusammen, welche die Ordinate der Curve ausdrückt. Folglich gibt die Function $b + 2cx + 3dx^2$ die Ordinate derjenigen Curve, deren Fläche eine im dritten Grad gleichmäßig wachsende Größe ist. Da nun die Function $b + 2cx + 3dx^2$ nur die Ordinate der gemeinen Parabel ausdrückt, so kann nur die von den Ordinaten dieser Parabel beschriebene Fläche im dritten Grad gleichmäßig wachsend sein. Denken wir eine Parabel, welche,

wie die in Figur 62, so gegen die Abscisse ab liegt, daß sie theils positive theils negative Ordinaten hat, und in deren Ordinatenausdruck $b+2cx+3dx^2$ der Coëfficient d positiv ist, so ist die Ordinate, d. h. der erste Differentialquotient der die Parabelfläche ausdrückenden Function, von a bis c positiv, von c bis e negativ, und über e hinaus wieder positiv. Der erste Differentialquotient der Ordinate, also der zweite Differentialquotient der Flächenfunction ist bis d negativ und dann positiv, und der dritte Differenzquotient der Flächenfunction ist positiv, weil der Coefficient d positiv angenommen ist. Mithin zeigt die Fläche der Parabel zwischen a und c bei positivem ersten, negativem zweiten Differentialquotienten und positivem dritten Differenzquotienten eine gleichmäßig abnehmende Retardation des Wachsens. Aus der Combination der in den einzelnen Intervallen stattfindenden Vorzeichen der beiden Differentialquotienten und des dritten Differenzquotienten der Fläche wird man leicht herleiten, daß zwischen c und d eine gleichmäßig abnehmende Beschleunigung des Abnehmens, zwischen d und e eine gleichmäßig wachsende Retardation des Abnehmens, und von e an eine gleichmäßig wachsende Beschleunigung des Wachsens der Fläche stattfindet. Ist in dem Ausdruck $b+2cx+3dx^2$ der Ordinate der Parabel der Coefficient d negativ, und hat die Parabel theils positive theils negative Ordinaten, wie die in Figur 63, so wird man aus denselben Gründen wie vorher mit Leichtigkeit einsehen, daß von a bis c eine gleichmäßig abnehmende Retardation des Abnehmens, von c bis d eine gleichmäßig abnehmende Beschleunigung des Wachsens, von d bis e eine zunehmende Retardation des Wachsens, und über e hinaus eine zunehmende Beschleunigung des Abnehmens der Fläche stattfindet. Man sieht hieraus, daß sämmtliche acht verschiedene Arten des Wachsens, welche die im dritten Grad gleichmäßig wachsenden Größen haben können, an der Fläche der Parabel zum Vorschein kommen, wenn man sie in den beiden angegebenen Lagen gegen die

Abscisse betrachtet. Liegt die Parabel, für welche natürlich immer die durch die Gleichung $y = a + bx + cx^2$ vorgeschriebene Lage der Coordinatenaxen vorausgesetzt wird, so gegen die Abscisse, daß sie nur positive oder nur negative Ordinaten hat, so geht der erste Differentialquotient der Flächenfunction entweder niemals durch den Nullwerth, und man erhält dann entsprechend dem Fall der cubischen Parabel Figur 61, in welchem der erste Differentialquotient der Ordinate niemals gleich Null wird, nur zwei Arten des Wachsens im dritten Grad, oder der erste Differentialquotient der Flächenfunction geht, indem der Scheitel der Parabel die Abscisse berührt, zwar einmal durch den Nullwerth, aber ohne Zeichenwechsel, und man erhält entsprechend dem Fall der cubischen Parabel in Figur 56 ebenfalls nur zwei Arten des Wachsens.

Daß man auf demselben Wege, auf welchem hier die im dritten Grad gleichmäßig wachsenden Ordinaten und Flächenräume construirt worden sind, auch zur Construction beliebiger anderer räumlichen Elemente, welche im dritten Grad gleichmäßig wachsen, gelangen kann, ist einleuchtend, und es wird folglich immer möglich sein, auch in dem Falle, in welchem die Veränderung der Beschleunigung des Wachsens nicht constant ist, sondern nur einen momentanen Werth hat (welcher Werth, wie wir gleich sehen werden, durch den dritten Differentialquotienten gegeben wird), durch Construction darzustellen, wie ein räumliches Element wachsen würde, wenn seine momentane Beschleunigung des Wachsens zur Ausführung käme.

§. 120.

Wir wissen, daß bei einer Function von der Form $a + bx + cx^2 + dx^3$ die durch gleiche Zunahmen der willkürlich Veränderlichen entstehenden successiven Functionswerthe eine arithmetische Reihe der dritten Ordnung bilden, und daß dies nur allein bei dieser Function stattfindet. Von dem dritten Differentialquotienten.

Sobald also eine abhängig Veränderliche ausgedrückt erscheint durch eine Function, welche von der Form $a + bx + cx^2 + dx^3$ abweicht, so ist man sicher, daß die bei gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen eintretenden Unterschiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen immer ungleichen Zuwachs erhalten werden. Es folgt daraus, daß die dritte Differenz dividirt durch $(\Delta x)^3$, d. h. der dritte Differenzquotient der Function nicht mehr constant sein kann, und zwar, daß er erstens auch für denselben Werth von Δx verschieden ausfallen muß, jenachdem man den Zahlenwerth x der willkürlich Veränderlichen, von welchem aus man die gleichen Zunahmen Δx setzt, nimmt, d. h. daß er eine Function von x sein muß, und daß er zweitens auch für denselben Werth von x verschieden ausfallen muß, jenachdem man die Zunahme Δx größer oder kleiner nimmt, d. h. daß die dritte Differenz nicht mehr im cubischen Verhältniß von Δx wachsen und abnehmen kann. Wird bei gleichen Zunahmen Δx der Zuwachs der Unterschiede der Zunahmen der Function immer größer, so wird auch für denselben Werth von x der dritte Differenzquotient nothwendig mit Vergrößerung von Δx vergrößert und mit Verkleinerung von Δx verkleinert. Wird hingegen bei gleichen Zunahmen Δx der Zuwachs der Unterschiede der Zunahmen der Function immer kleiner, so wird für denselben Werth von x der dritte Differenzquotient mit Vergrößerung von Δx nothwendig verkleinert, und mit Verkleinerung von Δx vergrößert. Setzt man also von einem gewissen Werth des x aus gleiche Zunahmen Δx, so kann der dadurch erhaltene dritte Differenzquotient jedenfalls nicht als Maß der für diesen Werth von x stattfindenden Veränderung der Beschleunigung des Wachsens dienen, da er mit dem zufälligen Werth Δx selbst veränderlich ist.

Zur Bestimmung der veränderlichen Stärke des Wachsens im dritten Grad führt uns folgende Betrachtung. Da mit allen auch noch so kleinen gleichen Zunahmen des x

immer ungleiche Zunahmen der Unterschiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen verbunden sind, so kann diese Letztere auch nicht in der kleinsten angebbaren Strecke gleichmäßig wachsend im dritten Grade sein. Mithin hat die Beschleunigung des Wachsens eine stetig veränderliche Stärke des Wachsens. Die stetige Veränderung bringt es aber mit sich, daß diese Stärke des Wachsens im dritten Grade nach jedem Uebergang von einem Größenzustand zu einem andern alle denkbaren unzählig vielen Zwischenwerthe ihres Größenzustandes durchlaufen hat. Mithin nähert sich diese veränderliche Stärke des Wachsens um so mehr einer constanten, je kleiner man den Spielraum der Zunahmen von x setzt. Wenn man also die abhängig Veränderliche innerhalb eines kleinen Intervalls als eine im dritten Grade gleichmäßig Wachsende betrachtet, und den dritten Differenzquotienten, welchen man durch vom Anfangspunkte dieses Intervalls aus gesetzte Zunahmen Δx bestimmt, als Maß für die im Anfangspunkte dieses Intervalls stattfindende Stärke des Wachsens im dritten Grade gelten läßt, so wird der daraus hervorgehende Fehler sicherlich um so unbedeutender, je kleiner man die Zunahmen Δx setzt. Als Maß einer constanten Stärke des Wachsens im dritten Grade hat aber der dritte Differenzquotient den Sinn, daß er angibt, um wie viel jeder folgende Unterschied der Zunahmen größer ist als der vorhergehende, wenn die willkürlich Veränderliche mehrmals um die Zahl 1 wächst. Man hat mithin die Bedeutung des mit fortgesetzter Verkleinerung von Δx immer genauer werdenden Näherungswerthes ebenso anzusehen. Obgleich nun der dritte Differenzquotient niemals den wahren Werth der momentanen Stärke des Wachsens im dritten Grade angeben kann, weil sich dieselbe auch innerhalb eines noch so kleinen Spielraums der Zunahmen Δx schon geändert hat, so wird doch, da der dritte Differenzquotient mit Verkleinerung von Δx sich einerseits ohne Ende dem wahren Werth der momentanen Stärke des Wachsens, anderseits einem bestimmten Grenzwerth

nähert, in welchen er mit Annullirung des Δx übergeht, dieser Grenzwerth des dritten Differenzquotienten der wahre Ausdruck der gesuchten momentanen Stärke des Wachsens im dritten Grade sein, und zwar in demselben Sinn, in welchem eine bestimmte Zahl eine constante Stärke des Wachsens im dritten Grade ausdrückt.

Um ein möglichst einfaches Beispiel von einem veränderlichen dritten Differenzquotienten zu geben, nehmen wir die Function $\frac{1}{6}x^4$. Lassen wir das x dreimal um die Zunahme Δx wachsen, oder geben wir der willkürlich Veränderlichen die vier Werthe x, $x+\Delta x$, $x+2\Delta x$ und $x+3\Delta x$, berechnen die vier zugehörigen Functionswerthe, bilden durch Abziehung erst die Zunahmen, dann die Unterschiede der Zunahmen und zuletzt den Zuwachs der Unterschiede der Zunahmen, so finden wir den Letzteren gleich $4x(\Delta x)^3+6(\Delta x)^4$. Wir haben also

$$\Delta^3\frac{1}{6}x^4=4x(\Delta x)^3+6(\Delta x)^4$$

und beiderseits durch $(\Delta x)^3$ dividirt

$$\frac{\Delta^3\frac{1}{6}x^4}{(\Delta x)^3}=4x+6\Delta x.$$

Dieser dritte Differenzquotient der Function $\frac{1}{6}x^4$ nähert sich mit Verkleinerung von Δx ohne Ende der Function $4x$, und dieselbe ist also der Grenzwerth des dritten Differenzquotienten, und gibt an, wie die Beschleunigung des Wachsens der Function $\frac{1}{6}x^4$ bei jedem Werthe von x wachsen würde, wenn sie ihre momentane Stärke des Wachsens beibehielte. Für $x=1$ z. B. ist die momentane Stärke des Wachsens im dritten Grade durch die Zahl 4 gegeben, d. h. sie ist so groß, daß, wenn sie unverändert bliebe, jeder folgende Unterschied der Zunahmen der Function $\frac{1}{6}x^4$

um 4 größer sein würde als der vorhergehende, sobald man die willkürlich Veränderliche um Zunahmen $=1$ wachsen läßt, oder daß jeder folgende Unterschied der Zunahmen um $4(\Delta x)^3$ größer sein würde als der vorhergehende, wenn man der willkürlich Veränderlichen beliebige gleiche Zunahmen Δx ertheilte. Wird allgemein für einen bestimmten Werth des x der Grenzwerth des dritten Differenzquotienten einer Function von x gleich a erhalten, so heißt dies: Die für diesen Werth des x vorhandene momentane Stärke des Wachsens im dritten Grade ist so groß, daß, wenn sie unverändert bliebe, jeder folgende Unterschied der Zunahmen der Functionswerthe um a größer sein würde als der vorhergehende, sobald man der willkürlich Veränderlichen Zunahmen $=1$ ertheilt, oder um $a(\Delta x)^3$ größer, wenn die Zunahmen der willkürlich Veränderlichen $=\Delta x$ sind.

Den Grenzwerth des dritten Differenzquotienten nennt man den dritten Differentialquotienten, und indem man auch die Bezeichnung desselben analog der für die niederen Differentialquotienten angenommenen bildet, schreibt man statt $\mathrm{Lim}\frac{\Delta^3 y}{(\Delta x)^3}$ kurzweg $\frac{d^3 y}{dx^3}$, und würde demgemäß das vorher für die Function $\frac{1}{6}x^4$ gefundene Resultat durch die Gleichung $\frac{d^3 \frac{1}{6}x^4}{dx^3}=4x$ ausdrücken. Bei der Form $\frac{\Delta^3 y}{(\Delta x)^3}$ denkt man unter $\Delta^3 y$ wirkliche Zunahmen der Größe y, nämlich den Zuwachs der Unterschiede derselben, bei der Form $\frac{d^3 y}{dx^3}$ hat man aber unter $d^3 y$ zu denken den Zuwachs, welchen die Unterschiede der Zunahmen der successiven Werthe der Function y annehmen würden, wenn die momentane Stärke des Wachsens im dritten Grade unverändert bliebe, während Δx sowol als dx in beiden

Fällen natürlich wirkliche Zunahmen der Größe x vorstellen.

Es ist hieraus einleuchtend, wie man die Bedeutung des isolirten dritten Differentials auszusprechen hat. Man nennt nämlich den mit dx^3 multiplicirten dritten Differentialquotienten einer Function das dritte Differential dieser Function. Das Zeichen d^3y wird also das dritte Differential der Function y andeuten, und eine Differentialgleichung des dritten Grades, wie z. B. die obige Gleichung $\frac{d^3\frac{1}{6}x^4}{dx^3} = 4x$ wird mit isolirten Differentialen geschrieben $d^3\frac{1}{6}x^4 = 4x\,dx^3$. Soll die Bedeutung des isolirten dritten Differentials klar ausgesprochen werden, so muß es natürlich einen angebbaren endlichen Zahlenwerth haben, und der Begriff des Unendlichkleinen darf nicht hineingemischt werden. Diese Bedeutung liegt ja aber auch auf der Hand. Das dritte Differential einer Function y nimmt für einen bestimmten Werth des x und einen beliebig zu setzenden Zahlenwerth des dx einen bestimmten Zahlenwerth an, und dieser gibt an, wie groß die constante dritte Differenz der den gleichen Zunahmen dx zugehörigen Werthe der Function y sein **würde**, wenn die für diesen bestimmten Werth des x vorhandene momentane Stärke des Wachsens im dritten Grade unverändert bliebe.

In welchem Sinne das dritte Differential einer Function ein Unendlichkleines der dritten Ordnung genannt werden könne, ist leicht zu übersehen. Da in dem dritten Differential einer Function der dritte Differentialquotient mit dx^3 multiplicirt erscheint, so wird bei fortgesetzter Verkleinerung von dx das dritte Differential sich im cubischen Verhältniß von dx verkleinern, während das zweite Differential sich nur im quadratischen Verhältniß von dx verkleinert. Wenn nun beide, der dritte und zweite Differentialquotient, endliche Werthe haben, so wird durch fortge-

setzte Verkleinerung von dx das dritte Differential beliebig vielmal kleiner gemacht werden können als das zweite, d. h. man kann die Zunahmen der willkürlich Veränderlichen immer so klein nehmen, daß der Zuwachs der Unterschiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen im Vergleich zu diesen Unterschieden selbst jeden beliebig vorgeschriebenen Grad von Kleinheit überschreitet, sowie wir auch früher gesehen haben, daß man die Zunahmen der willkürlich Veränderlichen immer so klein nehmen kann, daß der Unterschied der Zunahmen der abhängig Veränderlichen im Vergleich mit diesen Zunahmen selbst jede vorgeschriebene Grenze der Kleinheit überschreitet. Denkt man sich die Verkleinerung des dx bis zum Nullwerth fortgesetzt, so werden zwar beide Differentiale, das zweite und dritte, auch schlechtweg gleich Null werden, aber sie haben vor diesem Uebergang in dem Nullwerth relativ zu einander alle denkbaren Zahlenverhältnisse durchlaufen. Wenn man mit der für das erste, zweite und dritte Differential gebrauchten Benennung eines Unendlichkleinen der ersten, zweiten und dritten Ordnung weiter nichts sagen will, als daß diese Differentiale, indem sie sich dem Nullwerth nähern, relativ zu einander alle denkbaren Zahlenverhältnisse durchlaufen, und daß jedes folgende Differential ganz beliebig vielmal kleiner angenommen werden darf als das vorhergehende, so ist gegen diese Benennung nichts einzuwenden, und es ist durch dieselbe eine Eigenthümlichkeit der successiven Differentiale bezeichnet, welche von vielfältigem Gebrauch in der Mathematik ist, und bei vielen Untersuchungen nicht entbehrt werden kann. Nur muß man zugeben, daß diese Benennung das, was sie sagen soll, nicht allzu deutlich sagt, und daß sie einer Erklärung und Rechtfertigung in dem obigen Sinne bedarf, und nicht als ein selbstverständlicher Begriff dargeboten werden darf. Dabei ist immer festzuhalten, daß diese Benennung nur ein uneigentlicher Ausdruck ist, und daß es in Wahrheit keine Größen gibt, von denen die Eine unendlich vielmal kleiner wäre als die An-

dere, weil der Punkt, bei welchem die dem Nullwerth zugehenden Differentiale in dies Verhältniß übergehen, niemals als erreicht zu denken ist. Denn so lange dx bei seiner fortgesetzten Verkleinerung den Nullwerth noch nicht erreicht hat, behalten die Differentiale auch ein endliches Größenverhältniß, und wenn dx in den Nullwerth übergegangen ist, so sind alle Differentiale auch schlechtweg gleich Null, und untereinander gleich. Endlich ist nicht zu vergessen, daß man, indem man die verschiedenen Differentiale unendlichkleine Größen höherer Ordnungen nennt, nur etwas aussagt über die relativen Werthe der Differentiale bei ihrer gemeinschaftlichen Annäherung an den Nullwerth, aber keineswegs sie selbst für sich dadurch charakterisirt, am allerwenigsten etwas über die Bedeutung der einzelnen Differentiale sagt, vermöge welcher sie die Stärke des Wachsens in irgend einem Grade ausdrücken durch einen endlichen Zahlenwerth.

Was schließlich die Herleitung und Darstellung des dritten Differentialquotienten einer Function betrifft, so ist zwar klar, daß derselbe dadurch erhalten werden kann, daß man den dritten Differenzquotienten dieser Function vollständig aufstellt, und durch Annullirung der Zunahme der willkürlich Veränderlichen zu dem Grenzwerth desselben übergeht. Aber dieses jedenfalls sehr weitläufigen und mühsamen Verfahrens können wir uns ganz überheben, und auf viel kürzerem Wege zu demselben Ziele gelangen. Wir wissen bereits, daß der dritte Differenzquotient einer durch y vorgestellten Function von x durch eine zwiefache Weise der Aufeinanderfolge von Operationen erhalten werden kann, welche durch die beiden Formen $\frac{\Delta^3 y}{(\Delta x)^3}$ und $\frac{\Delta\left[\frac{\Delta\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}{\Delta x}\right]}{\Delta x}$ des dritten Differenzquotienten angedeutet sind. Der durch Annullirung von Δx entstehende dritte Differentialquotient

wird also nicht blos durch die Form $\frac{d^3y}{dx^3}$, sondern auch durch die Form $\frac{d\left[\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}\right]}{dx}$ bezeichnet werden können; und aus der letzteren Form ersieht man, daß der dritte Differentialquotient einer Function y erhalten werden kann durch dreimalige Anwendung der zur Bildung des ersten Differentialquotienten aufgestellten Regeln. Daß durch die beiden Formen $\frac{d^3y}{dx^3}$ und $\frac{d\left[\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}\right]}{dx}$ des dritten Differentialquotienten auf die beiden wesentlichen Bedeutungen desselben, gemäß welchen er erstens die momentane Veränderung der Beschleunigung des Wachsens der Größen y und x, und zweitens die momentane Stärke des Wachsens der Größen $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$ und x angibt, hingewiesen wird, ist in die Augen fallend.

§. 121.

Construction der momentanen Veränderung der Beschleunigung des Wachsens.

Die Bedeutung des dritten Differentialquotienten ist in dem vorhergehenden Paragraph allgemein, d. h. arithmetisch gegeben; man kann aber auch nach der sogenannten geometrischen Bedeutung desselben für beliebige veränderliche räumliche Größen fragen, oder man kann fragen, wie eine veränderliche Raumgröße von einem gewissen Punkte aus wachsen würde, wenn ihre in diesem Punkte vorhandene momentane Stärke des Wachsens im dritten Grade unverändert bliebe, ihre Stärke des Wachsens in den beiden niederen Graden aber nur den momentanen Werth hat, der ihr ohnedies in diesem Punkte zukommt. Es handelt sich

also darum, zu einer gegebenen veränderlichen Raumgröße eine andere so zu construiren, daß für einen bestimmten Werth der willkürlich Veränderlichen beide Größen erstens denselben Werth, zweitens dieselbe momentane Stärke des Wachsens, drittens dieselbe momentane Beschleunigung des Wachsens haben, und daß viertens diejenige Stärke des Wachsens im dritten Grade, welche für die Eine Größe momentan ist, für die Andere constant ist. Die Darstellung dieser zweiten den angegebenen Bedingungen genügenden veränderlichen Raumgröße nennen wir die Construction der momentanen Veränderung der Beschleunigung des Wachsens.

Wäre z. B. als veränderliche Größe die Ordinate einer krummen Linie gegeben, und man wollte ihre in einem bestimmten Abscissenpunkte vorhandene momentane Stärke des Wachsens im dritten Grad construiren, so wird diese Construction dargestellt durch die Ordinate einer andern krummen Linie, welche für diesen Abscissenpunkt dieselbe Ordinate, und denselben ersten und zweiten Differentialquotienten ihrer Ordinaten hat wie die gegebene Linie, und bei welcher außerdem der constante dritte Differenzquotient ihrer Ordinaten zusammenfällt mit dem in jenem Abscissenpunkte vorhandenen Werth des dritten Differentialquotienten der Ordinaten der gegebenen Linie. Man sagt von Linien, welche in irgend einem Punkte die Ordinate und die drei ersten Differentialquotienten ihrer Ordinaten gleich haben, daß sie sich in diesem Punkte im dritten Grade berühren. Man kann demnach die verlangte Construction auch kurz so aussprechen: Es ist eine im dritten Grade berührende Linie zu construiren, deren Ordinaten im dritten Grade gleichmäßig wachsend sind.

Um dies durch ein Beispiel zu erläutern, so sei für die Kreislinie Figur 57 die im Punkte d stattfindende momentane Veränderung der Beschleunigung des Wachsens der Ordinaten zu construiren. Dies geschieht durch die Ordinaten einer Linie, deren Gleichung im Allgemeinen die Form

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3$$

haben wird. Die vier Bedingungen, denen diese Linie bezüglich zur Kreislinie genügen soll, reichen hin, die vier unbestimmten Coefficienten a, b, c und d zu bestimmen. Die Gleichungen der Kreislinie und der gesuchten Linie sollen auf dieselben Coordinatenaxen bezogen sein. Die Ordinatengleichung des Kreises wird, wenn wir in den Punkt a den Nullpunkt der Abscisse, und den Radius $=1$ setzen, sein

$$y = (2x - x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Der erste Differentialquotient dieser Function ist $\dfrac{1-x}{(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}}$, der zweite $-\dfrac{1}{(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ und der dritte $\dfrac{3-3x}{(2x-x^2)^{\frac{5}{2}}}$. Die Ordinate der gesuchten parabolischen Linie und ihre drei ersten Differentialquotienten sind der Reihe nach $a + bx + cx^2 + dx^3$, $b + 2cx + 3dx^2$, $2c + 6dx$, und $6d$. Für den Punkt d Figur 57 möge die gemeinschaftliche Abscisse x beider Linien den Zahlenwerth $\dfrac{1}{2}$ haben. Substituiren wir in die Ausdrücke für die Ordinate beider Linien und für die drei ersten Differentialquotienten derselben statt x überall den Zahlenwerth $\dfrac{1}{2}$, so werden die Ordinaten beider Linien gleich sein, und ebenso die an Rangzahl gleichen Differentialquotienten derselben. Die Ordinate des Kreises und deren drei ersten Differentialquotienten nehmen bei dieser Substitution der Reihe nach die Zahlenwerthe $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $-\dfrac{8}{3\sqrt{3}}$, $\dfrac{16}{3\sqrt{3}}$ an, und die entsprechenden Ausdrücke der parabolischen Linie die Werthe $a + \dfrac{1}{2}b + \dfrac{1}{4}c + \dfrac{1}{8}d$, $b + c + \dfrac{3}{4}d$, $2c + 3d$, und $6d$. Wir erhalten also die vier Gleichungen

$$a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}c + \frac{1}{8}d = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b + c + \frac{3}{4}d = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$2c + 3d = -\frac{8}{3\sqrt{3}}$$

$$6d = \frac{16}{3\sqrt{3}}$$

und durch Auflösung derselben $d = \frac{8}{9\sqrt{3}}$, $c = -\frac{8}{3\sqrt{3}}$, $b = \frac{9}{3\sqrt{3}}$, und $a = \frac{5}{9\sqrt{3}}$ und die vorausgesetzte unbestimmte Gleichung der parabolischen Linie

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3$$

geht über in die bestimmte

$$y = \frac{5}{9\sqrt{3}} + \frac{9}{3\sqrt{3}}x - \frac{8}{3\sqrt{3}}x^2 + \frac{8}{9\sqrt{3}}x^3.$$

Diese Linie, welche im Punkte d die Kreislinie im dritten Grade berührt, fällt so nahe mit der Kreislinie zusammen, daß sie in der Zeichnung von derselben kaum unterschieden werden kann, wie man sich durch wirkliche Berechnung einiger Ordinaten beider Linien leicht überzeugen kann. Für den Punkt b, in welchem die Abscisse gleich $\frac{1}{2}$ ist, sind die Ordinaten beider Linien $= \frac{\sqrt{3}}{2}$. Im Punkt e, wo die Abscisse den Werth $\frac{5}{8}$ haben möge, findet sich die Ordinate des Kreises $= 0{,}9270$ und die Ordinate der kubischen Parabel $= 0{,}9271$. Ist im Punkte f die Abscisse $= \frac{6}{8}$, so ist die Ordinate des Kreises $= 0{,}9682$, und die der Parabel $= 0{,}9702$. Sei im Punkte g die Abscisse $= \frac{7}{8}$, so sind die Ordinaten beider Linien $= 0{,}9921$ und $= 1{,}0003$, und im Punkte c, in welchem die Ordinate des Kreises $= 1$

ist, findet sich die Ordinate der Parabel = 1,0264. Die parabolische Linie läuft also vom Punkte d aus zwischen der Kreislinie und der Tangente dieses Punktes, und cn möge die dem Punkte c zugehörige Ordinate derselben vorstellen.

An dem Kreis Fig. 57 sehen wir drei aufeinanderfolgende in demselben Punkte d eingeschlossene Grade der Stärke des Wachsens, oder die Werthe von drei Differentialquotienten nebeneinander construirt, und können die durch jeden einzelnen Grad bedingte Weise des Wachsens in einer besonderen Figur nachweisen und uns dadurch die anschaulichste Vorstellung von dem Wesen der einzelnen Differentialquotienten machen. Wenn nur die im Punkte d vorhandene Stärke des Wachsens der Ordinaten des Kreises zur Ausführung käme, so würden die Ordinaten desselben wachsen wie die Ordinaten der Tangente do. Wenn aber bei derselben momentanen Stärke des Wachsens die Beschleunigung des Wachsens der Ordinaten des Kreises zur Ausführung käme, so würden die Ordinaten desselben wachsen, wie die der gemeinen Parabel dp. Und wenn endlich bei derselben momentanen Stärke und Beschleunigung des Wachsens die für die Beschleunigung des Wachsens stattfindende momentane Stärke des Wachsens der Ordinaten des Kreises unverändert bliebe, so würden die Ordinaten desselben wachsen wie Ordinaten der parabolischen Linie dn.

An diesem Beispiel wird man schon deutlich übersehen, wie die in Einem Punkte vorhandenen aufeinanderfolgenden Grade des Wachsens, wenn sie verfolgt würden oder zur Ausführung kämen, das von diesem Punkte aus erfolgende wirkliche Wachsen der abhängig Veränderlichen näherungsweise bestimmen, und ein Mittel abgeben können, den wirklichen Verlauf derselben in immer engere Grenzen einzuschließen. Der einzelne Punkt mit seinen verschiedenen in ihm eingeschlossenen Modificationen des Wachsens erscheint dann gewissermaßen als der Keim, durch dessen Bestrebungen zu wachsen, oder wenn man will, durch dessen Bil-

dungstrieb das weitere wirkliche Wachsen der abhängig Veränderlichen bestimmt und vorgeschrieben wird. Hierauf beruht, wie wir bald sehen werden, der wichtigste Gebrauch, den man von den stufenweis aufeinanderfolgenden höheren Graden des Wachsens oder von den höheren Differentialquotienten macht.

Wenn wir noch fragen, wie eine durch senkrechte Parallelcoordinaten beschriebene Fläche wachsen würde, wenn ihre momentane Stärke des Wachsens im dritten Grade sich realisirte, so ist die Antwort darauf leicht zu geben. Die Figur, deren durch senkrechte Parallelcoordinaten beschriebene Fläche gleichmäßig wachsend im dritten Grade ist, kann, wie wir aus §. 119 wissen, keine andere sein als die gemeine Parabel. Es fragt sich also nur, wie die Parabel an einen bestimmten Punkt der andern Figur angelegt erscheinen muß, wenn beide Figuren in diesem Punkte die momentane Stärke des Wachsens ihrer Flächen im ersten und zweiten Grade gleich haben sollen, und die constante Stärke des Wachsens der Fläche der Parabel im dritten Grade mit der momentanen der andern Figur zusammenfallen soll. Die Functionen, welche die Flächen beider Figuren ausdrücken, müssen für den vorgeschriebenen Punkt erstens den ersten Differentialquotient gleich haben, d. h. die Figuren müssen eine gemeinschaftliche Ordinate haben. Da zweitens die zweiten Differentialquotienten der die Flächen ausdrückenden Functionen, d. h. die ersten Differentialquotienten der die Ordinaten ausdrückenden Functionen gleich sein müssen, so werden die beiden Figuren eine gemeinschaftliche Tangente haben, oder sich im ersten Grade berühren. Und da endlich der dritte Differenzquotient der die Fläche der Parabel ausdrückenden Function, d. h. der zweite Differenzquotient ihrer Ordinate, mit dem dritten Differentialquotienten der Fläche der andern Figur, d. h. mit dem zweiten Differentialquotienten ihrer Ordinate zusammenfallen muß, so werden beide Figuren sich zugleich im zweiten Grade berühren. Wenn mithin eine Parabel eine andere Linie im

zweiten Grade berührt, und zwar so, daß ihre Ordinaten gleichmäßig wachsend im zweiten Grade sind, so ist in der Fläche dieser Parabel diejenige Veränderung der Beschleunigung des Wachsens constant, welche in der Fläche der andern Figur für den Berührungspunkt momentan vorhanden ist. In der Fläche der Parabel kdp Fig. 57 z. B., welche die Kreislinie im Punkte d im zweiten Grade berührt, kommt die für die Kreisfläche im Punkte d stattfindende momentane Stärke des Wachsens im dritten Grade zur Ausführung. Wir sehen hier wieder drei aufeinanderfolgende Stufen der Stärke des Wachsens der Fläche in besonderen Flächenformen repräsentirt. Die im Punkte d vorhandene momentane Stärke des Wachsens der Kreisfläche ist so groß als die constante des Parallelogramms dbcq, die momentane Beschleunigung ihres Wachsens so groß als die constante des Paralleltrapezes dbco, und endlich ihre momentane Veränderung der Beschleunigung des Wachsens so groß als die constante der Parabelfläche dbcp.

Es mag hier noch eine Bemerkung in Bezug auf den Gebrauch des Wortes Berührung in höheren Graden eingeschaltet werden. Wir sehen an dem vorhergehenden Beispiel, daß eine Figur, welche in Bezug auf ihre Ordinaten im zweiten Grade gleichmäßig wachsend ist und eine andere Figur im zweiten Grade berührt, in Bezug auf ihre Fläche im dritten Grade gleichmäßig wachsend ist, und mit der Fläche der andern Figur die drei ersten Differentialquotienten gleich hat. Obgleich man das Wort Berührung in höheren Graden von Linien nur in sofern gebraucht hat, als einige Differentialquotienten ihrer Ordinaten für den Berührungspunkt gleich sind, so ist doch kein Grund vorhanden, warum man diese Benennung nur auf Ordinaten, und nicht auch auf andere Raumgrößen beziehen soll, und warum man z. B. von Figuren, deren Flächenfunctionen für einen gewissen Werth der willkürlich Veränderlichen zusammenfallen, und außerdem noch die zwei oder drei ersten Differentialquotienten gleich haben, nicht sagen soll, daß

sie sich in Bezug auf ihre Flächen im zweiten oder dritten Grade berühren. In diesem Sinne würde man sagen können, daß alle durch senkrechte Parallelcoordinaten beschrieben gedachte Figuren, welche sich in Bezug auf ihre Flächen im dritten Grade berühren, sich bezüglich ihrer Ordinaten im zweiten Grade berühren. Ja es wird sogar angemessen und sehr bequem sein, von Functionen Einer Veränderlichen überhaupt zu sagen, daß sie sich in einem höheren Grade berühren, sobald sie für einen gewissen Werth der willkürlich Veränderlichen gleiche Functionswerthe und mehrere aufeinanderfolgende gleiche Differentialquotienten vom niedrigsten Range haben, und zwar, daß sich die Functionen in dem sovielten Grade berühren, als die Anzahl ihrer gleichen Differentialquotienten beträgt. Wir werden uns in der Folge dieser kurzen Ausdrucksweise bedienen, und diese geometrische Benennung auf die Functionen überhaupt übertragen, wie man schon so manche andere ursprünglich geometrische Benennung auf die Arithmetik und Analysis übergetragen hat. Diese Uebertragung ist dadurch gerechtfertigt, daß das Eigenthümliche, was die Ordinaten bei verschiedenen Graden der Berührung zeigen, und was die Unterscheidung von Graden der Berührung herbeigeführt hat, von welcher Eigenthümlichkeit später noch besonders die Rede sein soll, ohne Weiteres auf alle Veränderlichen seine Anwendung findet.

§. 122.

Vom vierten Differentialquotienten.

Da bei den über den dritten Differentialquotienten hinausliegenden weiteren Modificationen des Wachsens im Wesentlichen immer dieselben Begriffsbestimmungen wiederkehren, und in Betreff der einzelnen Eigenschaften und Bestimmungen der Stärke des Wachsens in den folgenden Graden fast nur noch die Rangzahl variirt, so können wir durch Verallgemeinerung des über die drei niederen Grade des Wachsens Aufgestellten leicht zur Vollendung der Analyse

des Begriffs eines gemeinschaftlich fortschreitenden Wachsens veränderlicher Größen gelangen. Indessen wird es doch, um die ganze Schlußkette, durch welche das Wesen und die Bedeutung eines jeden Differentialquotienten dargelegt wird, beispielsweise kurz zu recapituliren, nicht undienlich sein, vorher noch den vierten Differentialquotienten abgesondert einer kurzen Betrachtung zu unterwerfen.

Wenn die mit gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen verbundenen Unterschiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen nicht immer um gleichviel größer oder kleiner werden, oder was dasselbe ist, wenn die für die Beschleunigung des Wachsens stattfindende Stärke des Wachsens nicht constant ist, so kann man nicht blos nach den einzelnen momentanen Werthen dieser Stärke des Wachsens fragen, welche Frage durch den dritten Differentialquotienten beantwortet wird, sondern man kann auch nach dem Gesetz der Zu- oder Abnahme dieser Stärke des Wachsens fragen. Dies Gesetz erfordert zu seiner Aufstellung, daß man eine höhere Stufe des Wachsens ins Auge faßt, als diejenige ist, welche durch den Zuwachs der Unterschiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen gegeben ist. Es kommt darauf an, zu bestimmen, wie viel dieser Zuwachs sich verändert bei einer bestimmten Zunahme der willkürlich Veränderlichen. Natürlich kann ein Gesetz der Veränderung dieser Stärke des Wachsens im dritten Grade nur angegeben werden, in sofern die Größe der Veränderung als eine gleichbleibende vorausgesetzt wird, d. h. in sofern der Zuwachs der Unterschiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen immer um gleichviel größer oder kleiner wird, oder die successiven Werthe der abhängig Veränderlichen eine arithmetische Reihe der vierten Ordnung bilden. Abhängig Veränderliche von dieser Eigenschaft sind im vierten Grade gleichmäßig Wachsende. Dieselben sind aller Bestimmung des Wachsens im vierten Grade, auch wo dasselbe veränderlich ist, zu Grunde zu legen, und alle Functio-

nen, durch welche dieselben ausgedrückt erscheinen, sind enthalten in der allgemeinen Function

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4.$$

Bildet man für Zunahmen der willkürlich Veränderlichen dieser Function im Werthe von $\varDelta x$ die vierte Differenzenreihe der zugehörigen Functionswerthe, so findet man die Glieder derselben constant und gleich $24e(\varDelta x)^4$, oder es ist

$$\varDelta^4(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4) = 24e(\varDelta x)^4.$$

Der constante Unterschied, welchen die Zunahmen der Unterschiede der Zunahmen unserer allgemeinen Function haben, wächst also im biquadratischen Verhältniß von $\varDelta x$, ist übrigens aber nur von dem Coefficienten der vierten Potenz von x abhängig. Wird die vierte Differenz der Function durch $(\varDelta x)^4$ dividirt, so gibt die constante Zahl $24e$, welche der vierte Differenzquotient heißt, und als allgemeines von $\varDelta x$ unabhängiges Maß der Stärke des Wachsens anzusehen ist, an, um wie viel jeder folgende Zuwachs der Unterschiede der Zunahmen der Function größer wird als der vorhergehende, wenn die willkürlich Veränderliche mehrmals um die Zahl 1 wächst.

Ist eine abhängig Veränderliche gegeben durch eine Function von x, welche nicht als besonderer Fall in der allgemeinen Function $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$ enthalten ist, so können auch innerhalb eines noch so klein angenommenen Spielraums der Veränderung des x die Zunahmen der Unterschiede der Zunahmen der Function nicht mehr gleiche Unterschiede zeigen, und es gibt folglich auch keine dauernde angebbare Stärke des Wachsens im vierten Grade. Dieselbe ist vielmehr stetig veränderlich, und es handelt sich nur um Angabe des Werthes, den sie momentan anzunehmen bestrebt ist. Aus den schon öfter angegebenen Gründen folgt, daß wenn man eine solche Größe innerhalb eines kleinen Intervalles als eine im vierten Grade gleichmäßig wachsende ansieht, und den Werth ihres für ein kleines $\varDelta x$ entwickelten vierten Differenzquotienten als Maß dieses im vierten

Grade gleichmäßigen Wachsens ansieht, der daraus entstehende Fehler durch fortgesetzte Verkleinerung des Δx so klein gemacht werden kann, daß er jeden beliebig gesetzten Grad von Kleinheit überschreitet. Die Bedeutung dieses durch den vierten Differenzquotienten gegebenen Näherungswerthes ist natürlich so auszusprechen, als wäre er das Maß einer im vierten Grade gleichmäßig Wachsenden. Der durch Annullirung von Δx entstehende Grenzwerth des vierten Differenzquotienten, welcher der vierte Differentialquotient heißt, drückt durch den Zahlenwerth, in welchen er für ein bestimmtes x übergeht, die für diesen Werth von x vorhandene momentane Stärke des Wachsens im vierten Grade genau aus, und zwar in dem Sinne, in welchem eine bestimmte Zahl eine constante Stärke des Wachsens im vierten Grade zu bezeichnen gebraucht wird. Erhalte ich also für einen bestimmten Werth des x den Werth des vierten Differentialquotienten einer Function gleich a, so heißt dies: W e n n d i e f ü r d i e s e n b e s t i m m t e n W e r t h d e s x v o r h a n d e n e m o m e n t a n e S t ä r k e d e s W a c h s e n s i m v i e r t e n G r a d e c o n s t a n t w ä r e, s o w ü r d e j e d e r f o l g e n d e Z u w a c h s d e r U n t e r s c h i e d e d e r Z u n a h m e n d e r F u n c t i o n um a g r ö ß e r s e i n a l s d e r v o r h e r g e h e n d e b e i Z u n a h m e n d e s x i m W e r t h e v o n 1.

Was die Bezeichnung des vierten Differentialquotienten einer Function f(x) betrifft, so ist derselbe analog den früheren Differentialquotienten durch $\frac{d^4 f(x)}{dx^4}$ auszudrücken, sowie auch die operative Herleitung desselben nicht durch Aufstellung des vierten Differenzquotienten bewerkstelligt zu werden braucht, sondern durch bloße Differentiation des dritten Differentialquotienten ausgeführt werden kann. Stellen wir den vierten Differentialquotienten der Function f(x) durch $\varphi(x)$ vor, so daß $\frac{d^4 f(x)}{dx^4} = \varphi(x)$, so nennt man den Ausdruck $\varphi(x) . dx^4$ und gleicher Weise den Ausdruck

$d^4 f(x)$, d. h. den mit dx^4 multiplicirten vierten Differentialquotienten der Function $f(x)$, das vierte Differential dieser Function. Das isolirte vierte Differential einer Function von x für sich betrachtet hat nur einen durch den beliebig anzunehmenden Werth von dx zu bestimmenden Zahlenwerth, dessen Bedeutung aus dem Vorhergehenden von selbst einleuchtend ist, und der nur zur Werthangabe der momentanen Stärke des Wachsens im vierten Grade dient. Was aber die relativen Werthe des vierten und dritten Differentials bei fortgesetzter Verkleinerung von dx betrifft, so ist, da das Erstere im biquadratischen und das Zweite im kubischen Verhältniß von dx abnimmt, leicht zu sehen, daß, so lange der vierte und dritte Differentialquotient endliche Werthe haben, das vierte Differential durch Verkleinerung des dx beliebig vielmal kleiner gemacht werden kann als das dritte, und daß beide Differentiale vor ihrem gemeinschaftlichen gleichzeitigen Uebergang in den Nullwerth relativ zu einander alle denkbaren Zahlenverhältnisse durchlaufen haben. Wenn man das vierte Differential ein Unendlichkleines der vierten Ordnung nennt, so hat man unter diesem abgekürzten uneigentlichen Ausdruck nichts weiter zu verstehen als das eben angegebene Verhalten des vierten Differentials zum dritten bei ihrer gemeinschaftlichen Annäherung an den Nullwerth, und macht von diesem Ausdruck auch nie einen andern Gebrauch in der Mathematik als den auf dies gegenseitige Verhalten der beiden Differentiale begründeten.

Um ein einziges leichtes Beispiel von Construction des vierten Differentialquotienten zu geben, so fragen wir, wie würde die durch senkrechte Parallelordinaten beschriebene Kreisfläche Fig. 57 von der Linie bd aus wachsen, wenn ihre an dieser Stelle vorhandene momentane Stärke des Wachsens im vierten Grade unverändert bliebe, und in der Fläche welcher Figur würde sich dies Wachsen darstellen. Die Fläche der gesuchten Figur wird im Allgemeinen ausgedrückt durch die Function $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$.

Die Ordinate derselben wird also durch $b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3$ gegeben sein, und wir sehen daraus, daß die Figur eine kubische Parabel ist. Es fragt sich also nur, wie diese kubische Parabel gegen den Kreis liegen muß. Nun ist klar, daß Figuren, welche an einem bestimmten Punkte sich in Bezug auf ihre Flächen im vierten Grade berühren sollen, den für diesen Punkt genommenen ersten, zweiten, dritten und vierten Differentialquotienten ihrer Flächenfunctionen gleich haben müssen, oder was dasselbe, daß sie die Ordinate und den ersten, zweiten und dritten Differentialquotienten ihrer Ordinaten gleich haben müssen, d. h. daß die Figuren in Bezug auf ihre Ordinaten sich im dritten Grade berühren müssen. Wenn wir daher die im vorhergehenden Paragraphen schon construirte, die Kreislinie im Punkte d im dritten Grade berührende kubische Parabel dn nehmen, so wird in der Fläche derselben diejenige Stärke des Wachsens der Kreisfläche im vierten Grade, welche im Punkte d momentan vorhanden ist, ausgeführt enthalten sein.

Was schließlich die verschiedenen Arten des Wachsens betrifft, welche hervortreten, wenn man den Begriff des Wachsens bis zum vierten Grade verfolgt, so ist einleuchtend, daß die Anzahl derselben doppelt so groß sein wird als diejenige, welche sich bei Bestimmung des Wachsens im dritten Grade zeigt. Denn jede Beschleunigung oder Retardation des Wachsens oder Abnehmens, welche durch den dritten Differentialquotienten im nächstfolgenden Grade bestimmt sich als eine zunehmende oder abnehmende zeigte, wird offenbar eine beschleunigt oder retardirt zu- oder abnehmende sein, jenachdem der Zuwachs der Unterschiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen entweder immer größer oder immer kleiner wird. Das Erstere wird aber der Fall sein, wenn der vierte Differentialquotient gleiches Vorzeichen mit dem dritten hat, und das Letztere, wenn die Vorzeichen beider Differentialquotienten entgegengesetzt sind. Denn wenn für einen gewissen Werth der willkürlich

Veränderlichen der dritte und vierte Differentialquotient einer Function gleiche Vorzeichen haben, so läßt sich von diesem Werthe der willkürlich Veränderlichen aus immer ein solches Intervall derselben angeben, innerhalb dessen auch der dritte und vierte Differenzquotient, und folglich auch die dritte und vierte Differenz der Function gleiche Vorzeichen haben, und mithin wird auch der Zuwachs der Unterschiede der Zunahmen der Function durch Zusatz eines gleichartigen Theiles immer größer werden. Auf dieselbe Weise läßt sich darthun, daß bei entgegengesetztem Vorzeichen des dritten und vierten Differentialquotienten der Zuwachs der Unterschiede der Zunahmen der Function wenigstens innerhalb eines wenn auch beliebig kleinen Intervalls immer kleiner werden muß. Darnach ist aus den Vorzeichen der vier ersten Differentialquotienten die Natur des bis zum vierten Grade bestimmten Wachsens leicht anzugeben. Wäre z. B. der erste Differentialquotient positiv, der zweite negativ, der dritte auch negativ und der vierte positiv, so zeigt der erste positive Differentialquotient ein Wachsen der Function, der zweite negative eine Retardation des Wachsens, der dritte negative eine zunehmende Retardation des Wachsens, und der vierte positive eine retardirt zunehmende Retardation des Wachsens an, und so in allen andern Fällen.

Indem wir in der Bezeichnung der Arten des Wachsens durch Worte und Begriffe bis zum vierten Grade fortgegangen sind, läßt sich bemerken, daß eine weitere Verfolgung der Arten des Wachsens durch Wortbezeichnungen die Klarheit unserer Vorstellungen nicht vermehren, sondern durch unvermeidliche Schwerfälligkeit und Weitschweifigkeit der Wortbildung eher beeinträchtigen werde. Es ist aber auch eine weitere Verfolgung gar nicht nöthig. Es reicht völlig hin, die aus der Combination der niedrigsten Differentialquotienten hervorgehende Natur des Wachsens mit klaren Worten ausgesprochen zu haben, und überhaupt für den Begriff des Wachsens die Möglichkeit einer end-

losen Spaltung und Verzweigung in untergeordnete Artbegriffe nachgewiesen zu haben. Ueberdies ist die Auffassung der Stärke des Wachsens in jedem einzelnen Grade für sich, und folglich auch die Bedeutung der einzelnen Differentialquotienten, unabhängig von dieser Combination eines Differentialquotienten mit den vorausgehenden niederen. Denn jede gegebene Stärke des Wachsens in irgend einem Grade für sich bezieht sich nur auf die sovielte Differenz der successiven Functionswerthe, als die Gradzahl der Stärke des Wachsens angibt.

§. 123.

Constante Differenz der Potenzfunction mit ganzen positiven Exponenten.

Ehe wir zu einer zusammenfassenden schließlichen allgemeinen Betrachtung der höheren Differentialquotienten übergehen, haben wir noch die Frage zu beantworten, ob der Begriff einer Potenzenreihe der willkürlich Veränderlichen mit ganzen positiven Exponenten und der Begriff einer in irgend einem höheren Grade gleichmäßig wachsenden Größe Wechselbegriffe sind und sich gegenseitig einschließen. Daß eine abhängig Veränderliche, deren Werthe zuletzt auf eine constante Differenzenreihe führen, immer durch eine Potenzenreihe der willkürlich Veränderlichen mit ganzen positiven Exponenten ausgedrückt erscheinen muß, wissen wir bereits (s. §. 118) und es fragt sich nur noch, ob auch umgekehrt eine solche Potenzfunction zuletzt immer auf eine constante Differenzenreihe ihrer successiven Functionswerthe führen muß, sobald man, wie dabei überall vorausgesetzt ist, die willkürlich Veränderliche um gleiche Zunahmen wachsen läßt.

Wir untersuchen zuerst, ob bei einer einfachen Potenzfunction x^m die Glieder irgend einer Differenzenreihe der successiven Functionswerthe gleich werden müssen, wenn m eine ganze positive Zahl ist. Diese Untersuchung wird zum Ziele zu führen sein, wenn wir einen allgemeinen Ausdruck für ein Glied einer beliebigen Differenzenreihe der

gegebenen Function aufstellen. Denn zeigt sich dieser allgemeine Ausdruck von der Art, daß er für eine gewisse Differenzenreihe nicht mehr von x abhängig ist, so gilt er gleicherweise für alle Werthe von x, und die Glieder dieser Differenzenreihe sind constant. Wächst x mehrmals um die Zahl Δx, so sind die zugehörigen Functionswerthe x^m, $(x+\Delta x)^m$, $(x+2\Delta x)^m$ u. s. w. Das durch Δx^m zu bezeichnende Anfangsglied der ersten Differenzenreihe ist gleich $(x+\Delta x)^m - x^m$, oder es ist, wenn wir den Ausdruck $(x+\Delta x)^m$ nach dem binomischen Lehrsatz entwickeln und x^m davon abziehen,

$$\Delta x^m = m x^{m-1} \Delta x + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} (\Delta x)^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} x^{m-3} (\Delta x)^3 \ldots.$$

Um das Anfangsglied der zweiten Differenzenreihe zu erhalten, müssen wir das folgende Glied der ersten Differenzenreihe, oder das nach unserm Sprachgebrauch erste Glied derselben, darstellen, und das Anfangsglied derselben Differenzenreihe davon abziehen. Das erste Glied der ersten Differenzenreihe ist offenbar $(x+2\Delta x)^m - (x+\Delta x)^m$. Wir können aber, weil das auf der Entwickelung dieser Potenzen beruhende Verfahren sich nicht so bequem verallgemeinern läßt, zu dem Ausdruck für das erste Glied der ersten Differenzenreihe auch auf einem andern Wege gelangen. Denn der für Δx^m gefundene Ausdruck stellt offenbar, weil x ein beliebiger Zahlenwerth ist, überhaupt ein Glied der ersten Differenzenreihe vor, und zwar dasjenige Glied, welches entsteht, indem die willkürlich Veränderliche von dem Zahlenwerthe x zu dem Zahlenwerthe $(x+\Delta x)$ übergeht. Wir werden daher den Ausdruck für dasjenige Glied der ersten Differenzenreihe, welches entsteht, indem die willkürlich Veränderliche von dem Zahlenwerthe $(x+\Delta x)$ zum Zahlenwerthe $(x+2\Delta)$ übergeht, erhalten, wenn wir in dem für Δx^m gegebenen Ausdruck überall $x+\Delta x$ statt x setzen, und dies Glied der ersten Differenzen-

reihe durch $\Delta(x+\Delta x)^m$ zu bezeichnen haben. Es wird also

$$\Delta(x+\Delta x)^m = m(x+\Delta x)^{m-1}\Delta x + \frac{m(m-1)}{1.2}(x+\Delta x)^{m-2}(\Delta x)^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(x+\Delta x)^{m-3}(\Delta x)^3 \ldots.$$

Entwickelt man die hier vorkommenden Potenzen $(x+\Delta x)^{m-1}$, $(x+\Delta x)^{m-2}$, $(x+\Delta x)^{m-3}$ nach dem binomischen Lehrsatz, addirt alle Theile mit gleichen Potenzen von Δx zusammen, und zieht den für Δx^m gegebenen Ausdruck davon ab, so erhält man das durch $\Delta^2 x^m$ zu bezeichnende Anfangsglied der zweiten Differenzenreihe, und zwar findet sich

$$\Delta^2 x^m = m(m-1)x^{m-2}(\Delta x)^2 + 6.\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^{m-3}(\Delta x)^3 + 14.\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}x^{m-4}(\Delta x)^4 \ldots.$$

Ohne uns jetzt um das Gesetz zu bekümmern, nach welchem die Zahlen gebildet sind, die in den Coefficienten vorkommen, bemerken wir blos, daß die ganzen Coefficienten von $x^{m-3}(\Delta x)^3$ und von $x^{m-4}(\Delta x)^4$ jedenfalls Ausdrücke sind, die nur von m und dem Grade der gebildeten Differenz abhängen können. Wenn wir diese Coefficienten abgekürzt durch M_3 und M_4 bezeichnen, so haben wir

$$\Delta^2 x^m = m(m-1)x^{m-2}(\Delta x)^2 + M_3 x^{m-3}(\Delta x)^3 + M_4 x^{m-4}(\Delta x)^4 \ldots$$

Um das Anfangsglied der dritten Differenzenreihe zu bilden, müssen wir das erste Glied der zweiten Differenzenreihe darstellen, und das Anfangsglied derselben davon abziehen. Aus denselben Gründen, durch welche das für die Bildung des ersten Gliedes der ersten Differenzenreihe angewendete Verfahren gerechtfertigt worden ist, folgt auch hier, daß das erste Glied der zweiten Differenzenreihe erhalten wird, wenn wir in dem für $\Delta^2 x^m$ gegebenen Ausdrucke überall $x+\Delta x$ statt x setzen. Es wird folglich

$$\Delta^2(x+\Delta x)^m = m(m-1)(x+\Delta x)^{m-2}(\Delta x)^2 + M_3(x+\Delta x)^{m-3}(\Delta x) + M_4(x+\Delta x)^{m-4}(\Delta x)^4 \ldots.$$

Entwickeln wir die hier vorkommenden Potenzen von $(x+\Delta x)$, führen dabei für M_3 seinen aus dem Obigen bekannten Werth wieder ein, addiren die Glieder mit gleichen Potenzen von Δx zusammen, und ziehen endlich den Werth von $\Delta^2 x^m$ davon ab, so erhalten wir das durch $\Delta^3 x^m$ zu bezeichnende Anfangsglied der dritten Differenzenreihe, und zwar findet sich

$$\Delta^3 x^m = m(m-1)(m-2)x^{m-3}(\Delta x)^3 + \overset{1}{M_4} x^{m-4}(\Delta x)^4 \ldots.$$

wobei $\overset{1}{M_4}$ einen von M_4 verschiedenen durch den Grad der Differenz bestimmten Werth hat.

Wenn wir die für Δx^m, $\Delta^2 x^m$ und $\Delta^3 x^m$ gefundenen Ausdrücke, welche zugleich als Ausdrücke für ein beliebiges Glied der ersten, zweiten und dritten Differenzenreihe gelten, überblicken, so sehen wir, daß jeder folgende mit einer um eine Einheit niedrigeren Potenz von x anfängt, und es ist aus dem ganzen Verfahren der Bildung dieser Ausdrücke einleuchtend, daß dies auch für die folgenden Differenzenreihen stattfinden werde, und daß folglich, da nach Voraussetzung m eine ganze positive Zahl ist, von den in einem solchen Ausdrucke addirten Bestandtheilen jede folgende Differenzenreihe einen weniger enthalten muß, weil der Ausdruck für ein Glied einer Differenzenreihe an seinem Ende offenbar abbricht mit demjenigen Bestandtheil, in welchem x auf die Potenz $m-m$ erhoben erscheint. Mithin wird zuletzt bei irgend einer Differenzenreihe in dem allgemeinen Ausdruck ihres Gliedes nur Ein Bestandtheil übrig bleiben, in welchem x auf die Potenz $m-m$ erhoben erscheint; welcher Bestandtheil daher, da er keine Function von x mehr ist, sondern nur von m und Δx abhängt, für alle Werthe von x derselbe ist, und das constante Glied dieser Differenzenreihe darstellt.

Um zu beurtheilen, bei welcher Differenzenreihe die gleichen Glieder eintreten müssen, und um zugleich die Größe derselben anzugeben, brauchen wir nur den ersten Bestandtheil der für die successiven Differenzen gegebenen

Ausdrücke ins Auge zu fassen, da dieser erste Bestandtheil der bei weiterer Differenzenbildung zuletzt allein übrig bleibende ist. Diese ersten Bestandtheile sind $mx^{m-1}\Delta x$, $m(m-1)x^{m-2}(\Delta x)^2$ und $m(m-1)(m-2)x^{m-3}(\Delta x)^3$, und dieselben haben ein so einfaches Gesetz ihrer Coefficienten, daß man ohne Weiteres folgern kann, daß der erste Bestandtheil einer beliebigen, etwa der nten Differenz sein werde

$$m(m-1)(m-2)\ldots\ldots\big(m-(n-1)\big)x^{m-n}(\Delta x)^n.$$

Setzen wir m statt n in diesen Ausdruck, so ist der erste Bestandtheil der mten Differenz gleich

$$m(m-1)(m-2)\ldots\ldots 3.2.1\,(\Delta x)^m$$

und wir sehen, daß dieser erste Bestandtheil zugleich der einzige ist, und daß bei der Function x^m die mte Differenzenreihe der Functionswerthe aus gleichen Gliedern besteht, deren jedes eine durch m und Δx auf die angegebene Art bestimmte Größe hat.

Hat man statt x^m die Function ax^m, so wird die mte Differenz von ax^m gleich sein der mten Differenz von x^m multiplicirt mit a, weil bei jeder Function f(x) die erste Differenz von af(x) oder $\Delta af(x) = af(x+\Delta x) - af(x) = a[f(x+\Delta x) - f(x)] = a\Delta f(x)$, und dies ebenso für alle folgenden Differenzen gilt, indem jede Differenz von f(x) ja überhaupt eine Function von x ist.

Um endlich die gefundenen Resultate auch auf eine aus mehreren Potenzen von x zusammengesetzte Function auszudehnen, brauchen wir nur zu bedenken, daß für eine aus beliebigen Functionen fx und φx zusammengesetzte Function $fx + \varphi x$ die erste Differenz erhalten wird, wenn wir die ersten Differenzen der einzelnen Functionen addiren, wovon man sich durch die schematische Ausführung der ersten Differenz von $fx + \varphi x$ leicht überzeugen kann, indem

$$\begin{aligned}\Delta(fx+\varphi x) &= f(x+\Delta x) + \varphi(x+\Delta x) - (fx+\varphi x)\\ &= f(x+\Delta x) - fx + \varphi(x+\Delta x) - \varphi x\\ &= \Delta fx + \Delta\varphi x.\end{aligned}$$

Da nun die ersten Differenzen beliebiger Functionen von

x selbst wieder Functionen von x sind, so wird die zweite und selbstverständlich ebenso jede folgende Differenz einer durch Addition von Functionen zusammengesetzten Function erhalten, wenn man diese Differenzen der einzelnen Functionen nimmt, und dieselben zusammenaddirt.

In der allgemeinen Function

$$a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots . + px^{m-1} + qx^m$$

ist sonach die mte Differenz constant. Denn nimmt man die mte Differenz der einzelnen Potenzen von x, so ist dieselbe für alle Potenzen, deren Exponent kleiner als m ist, gleich Null; es fällt mithin die mte Differenz der obigen allgemeinen Function mit der mten Differenz des letzten Bestandtheils qx^m zusammen, und ist dem Obigen zu Folge für eine Zunahme Δx gleich

$$1 . 2 . 3 . 4 \ldots (m-1) . m . q(\Delta x)^m .$$

Jede Potenzenreihe mit ganzen positiven Exponenten stellt also eine in irgend einem höheren Grade gleichmäßig wachsende abhängig Veränderliche vor, und hat ein für alle Werthe der willkürlich Veränderlichen gleichbleibendes Gesetz des Wachsens, welches in irgend einer höheren Stufe der Differenzenbildung zum Vorschein kommt, sowie wir anderseits wissen (s. §. 118), daß nur für solche Potenzenreihen die Veränderungen des Wachsens zu einem endlichen Abschluß kommen, und ein unveränderliches Gesetz des Wachsens sich angeben läßt, und daß mithin bei allen andern Functionen ein innerhalb eines Intervalles dauerndes Gesetz des Wachsens nur annähernd angegeben werden kann, und zwar in sofern als innerhalb dieses Intervalls die Function annähernd durch eine Potenzenreihe der willkürlich Veränderlichen ausgedrückt werden kann.

§. 124.

Von den höheren Differentialquotienten im Allgemeinen.

Es bleibt uns nun, um zu einem vollständigen Begriff der Natur des Wachsens veränderlicher Größen zu kommen, nichts mehr übrig, als die über die niederen Grade des Wachsens gefundenen Sätze zu verallgemeinern,

was nach der für die einfacheren Fälle gegebenen Darstellung auf dem Wege einer einfachen Induction geschehen kann.

Jedes Wachsen einer abhängig Veränderlichen kann nach Art und Größe nur in sofern bestimmt angegeben und ausgesprochen werden, als vorausgesetzt wird, daß mit gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen gleiche Zunahmen der abhängig Veränderlichen in irgend einer Stufe der successiven Differenzenbildung verbunden sind, oder daß die abhängig Veränderliche in irgend einem höheren Grade gleichmäßig wachsend ist. Jede als stetig veränderlich vorausgesetzte Stärke des Wachsens in irgend einem Grade kann dem bestimmten Größenwerth nach, den sie momentan annimmt, faßlich angegeben werden nur dadurch, daß man die in demselben Grade gleichmäßig wachsende Größe angibt, deren constante Stärke des Wachsens mit jener momentanen zusammenfällt. Die allgemeine Function, unter welche jede in irgend einem höheren Grade gleichmäßig wachsende abhängig Veränderliche subsumirt werden kann, ist eine Potenzenreihe der willkürlich Veränderlichen mit ganzen positiven Exponenten. Sei qx^m das Glied dieser Potenzenreihe mit dem höchsten Exponenten, so ist für ein unveränderliches Δx die mte Differenz der Potenzenreihe constant und gleich $1.2.3\ldots m.q(\Delta x)^m$. Diese mte Differenz ist das bezüglich auf den angenommenen Werth von Δx bestimmte Maß der constanten Stärke des Wachsens im mten Grade. Wird dieselbe durch $(\Delta x)^m$ dividirt, so liefert der so gebildete mte Differenzquotient eine von Δx unabhängige constante Zahl, deren Bedeutung, in sofern sie die Stärke des Wachsens im mten Grade bezeichnen soll, daraus klar ist, daß sie mit der mten Differenz zusammenfällt, wenn man $\Delta x = 1$ setzt.

Soll die Stärke des Wachsens im mten Grade bestimmt werden für eine abhängig Veränderliche, deren Werth entweder überhaupt nicht durch eine Potenzenreihe mit ganzen positiven Exponenten ausgedrückt erscheint, oder durch Potenzen, die den Grad m übersteigen, so ist die mte Dif-

ferenz der Functionswerthe innerhalb jedes auch noch so kleinen angebbaren Intervalles der willkürlich Veränderlichen nicht mehr constant, und die Stärke des Wachsens im mten Grade also stetig veränderlich. Aus der Stetigkeit dieser Veränderung folgt aber, daß die für einen bestimmten Werth der willkürlich Veränderlichen x vorhandene momentane Stärke des Wachsens im mten Grade sich innerhalb eines Intervalles der Zunahmen von x um so weniger ändert, je kleiner man dies Intervall setzt. Wenn man daher die Stärke des Wachsens im mten Grade innerhalb eines kleinen Intervalles als constant betrachtet, und durch m gleiche Zunahmen, die man vom Anfangspunkte dieses Intervalles und innerhalb desselben nimmt, den mten Differenzquotienten bestimmt, und die durch den Werth desselben angegebene Stärke des Wachsens im mten Grade als diejenige gelten läßt, die im Anfangspunkte dieses Intervalls vorhanden ist, so wird der daraus hervorgehende Fehler durch Verkleinerung der gleichen Zunahmen des x ganz beliebig klein gemacht werden können. Da nun der mte Differenzquotient einer Function von x so gut als der erste sich mit Verkleinerung von Δx einem festen Grenzwerthe nähern muß, indem er ja selbst nur der erste Differenzquotient des vorhergehenden, also der erste irgend einer Function von x ist, und da anderseits der Werth des innerhalb eines Intervalls bestimmten mten Differenzquotienten sich mit Verkleinerung des Δx dem wahren Werthe der im Anfangspunkte dieses Intervalles vorhandenen momentanen Stärke des Wachsens im mten Grade ohne Ende nähern muß, so ist klar, daß der mit der Annullirung von Δx eintretende Grenzwerth des mten Differenzquotienten, welcher der mte Differentialquotient heißt, und analog den niederen Differentialquotienten einer Function fx durch $\frac{d^m fx}{dx^m}$ bezeichnet wird, die im Anfangspunkte des genommenen Intervalls vorhandene momentane Stärke des Wachsens im mten Grade genau angeben muß. Wird der bestimmte

Zahlenwerth, in welchen der mte Differentialquotient einer Function von x für ein bestimmtes x übergeht, gleich a gefunden, so heißt dies: Die bei diesem bestimmten Werthe des x vorhandene momentane Stärke des Wachsens im mten Grade ist so groß, daß, wenn sie unverändert bliebe, die Glieder der mten Differenzenreihe der durch gleiche Zunahmen Δx entstehenden successiven Functionswerthe sämmtlich gleich $a(\Delta x)^m$, oder für $\Delta x = 1$, gleich a sein würden.

Dies ist die Bedeutung von $\frac{d^m y}{d x^m}$ in Bezug auf das Wachsen der Größen y und x. Da aber der mte Differentialquotient von y zugleich der erste Differentialquotient des $(m-1)$ten Differentialquotienten von y ist (worauf auch das Verfahren der operativen Herleitung des mten Differentialquotienten von y gegründet wird) so hat $\frac{d^m y}{d x^m}$ auch noch die andere Bedeutung, daß dadurch die momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachsens der Größen $\frac{d^{m-1} y}{d x^{m-1}}$ und x angegeben wird, sowie selbstverständlich auch die momentane Beschleunigung des Wachsens der Größen $\frac{d^{m-2} y}{d x^{m-2}}$ und x, oder die momentane Stärke des Wachsens im dritten Grade der Größen $\frac{d^{m-3} y}{d x^{m-3}}$ und x u. s. w.

Den mit $(dx)^m$ multiplicirten mten Differentialquotienten einer Function von x nennt man das mte Differential dieser Function. Für sich betrachtet hat dasselbe nur eine Bedeutung als Ausdruck der Stärke des Wachsens im mten Grade, indem sein durch den beliebig anzunehmenden Werth von dx bestimmter Zahlenwerth angibt, wie groß bei diesem Werthe von dx die Glieder der mten Differenzenreihe der Functionswerthe sein würden, wenn die Stärke des Wachsens im mten Grade unverändert bliebe.

Relativ zu dem (m—1)ten Differential kann aber das mte Differential durch Verkleinerung von dx nicht blos beliebig vielmal kleiner gemacht werden als das Erstere, sondern die beiden Differentiale werden auch, wenn man die Verkleinerung von dx bis zum Nullwerth fortgesetzt denkt, vor ihrem gemeinschaftlichen Uebergang in den Nullwerth in ihrem gegenseitigen Verhältniß alle denkbaren Zahlenwerthe durchlaufen haben, was daraus folgt, daß das (m—1)te Differential im Verhältniß der (m—1)ten Potenz von dx abnimmt, das mte Differential aber im Verhältniß der mten Potenz von dx. Dies gegenseitige Verhalten des mten Differentials zu dem (m—1)ten bei ihrer gemeinschaftlichen Annäherung an Null ist es, was man ausdrücken will, wenn man das mte Differential kurzweg ein Unendlichkleines der mten Ordnung nennt.

In Betreff der möglichen verschiedenen Arten des Wachsens, welche in jedem Grade denkbar sind, überzeugt man sich leicht, daß jeder folgende Grad doppelt so viel Arten zuläßt als der vorhergehende, weil jede in einem Grade vorkommende Art beim Fortgang zum nächsten Grade als eine zunehmende oder abnehmende sich zeigen wird, je nachdem die dem vorhergehenden Grade entsprechenden Differenzen der Functionswerthe entweder größer oder kleiner werden, d. h. je nachdem die nächste Differenz gleiches Vorzeichen mit der vorhergehenden hat oder entgegengesetztes. Dabei müssen die Zunahmen immer innerhalb eines so kleinen Intervalles genommen gedacht werden, daß die mte Differenz gleiches Vorzeichen mit dem mten Differentialquotienten hat, was immer möglich ist, so lange alle Differentialquotienten bis zum mten endliche Werthe haben. Wenn man die Art kennt, wie aus gegebenen Elementen Combinationen mit Wiederholungen und Versetzungen gebildet werden, so wird man sogleich einsehen, daß man alle möglichen Arten der Stärke des Wachsens im mten Grade erhält, wenn man aus den beiden Zeichen + und — die Combinationen der mten Klasse mit Wiederholungen und

Versetzungen bildet. Im ersten Grade der Stärke des Wachsens hat man nur zwei Fälle, indem der erste Differentialquotient entweder das Vorzeichen + oder — hat. Indem sich mit beiden Fällen ein positiver oder negativer zweiter Differentialquotient verbindet, erhält man in den Combinationen

$$\begin{array}{cccc} + & - & + & - \\ + & + & - & - \end{array}$$

die vier Arten des Wachsens im zweiten Grade, und indem zu jeder dieser vier Arten ein positiver oder negativer dritter Differentialquotient hinzutritt, hat man in den Combinationen

$$\begin{array}{cccccccc} + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & + & + & + & - & - & - & - \end{array}$$

alle acht Arten des Wachsens im dritten Grade. Wenn die untereinander stehenden Zeichen die Vorzeichen des ersten, zweiten und dritten Differentialquotienten bedeuten, so sind in der Gruppe links alle Fälle der Stärke des Wachsens im dritten Grade enthalten, welche sich bei einer im dritten Grade gleichmäßig Wachsenden mit positivem dritten Differenzquotienten vereinigt finden, und welche z. B. in dem Wachsen der Ordinaten der Fig. 59 oder in dem Wachsen der Fläche Fig. 62 vereinigt vorkommen, sowie in der Gruppe rechts alle Fälle des Wachsens im dritten Grade enthalten sind, welche sich in dem Wachsen der Ordinaten Fig. 60 und in dem Wachsen der Fläche Fig. 63 vereinigt finden. Wird jeder dieser acht Combinationen wieder mit + und — verbunden, so erhält man vollständig die sechzehn möglichen Arten des Wachsens im vierten Grade, u. s. w. Die Anzahl der im mten Grade der Stärke des Wachsens möglichen Arten des Wachsens ist 2^m. Da jeder Artbegriff des Wachsens sich in zwei spaltet, so kann man nach Art eines Stammbaumes eine Stammtafel unserer Begriffe von den Modificationen des Wachsens auf die einfache Weise entwerfen, daß man jede neue dichotomische Abzwei-

gung mit den Zeichen + und — behaftet, und alsdann ist jedes Glied in dieser großen Familie von Begriffen durch die Verbindung, in welcher es mit den vorhergehenden Gliedern steht, seiner Natur nach völlig bestimmt. Der Stammbegriff, aus welchem alle die Artbegriffe einer Stärke des Wachsens oder Abnehmens, einer Beschleunigung des Wachsens u. s. w. hervorgehen, ist der Begriff einer veränderlichen Größe, und die Nachkommenschaft dieses Begriffes ist wie Sand am Meere.

Blicken wir zurück auf die Aufgabe, welche wir uns in dem ersten Paragraphen dieses zweiten Theiles unserer Wissenschaft gestellt hatten, und welche darin bestand, die Veränderung der Stärke des Wachsens sowie die Veränderung dieser Veränderung, und so fort jede neu hinzutretende Veränderung, mag dieselbe nun constant oder selbst wieder veränderlich sein, zu bestimmen, und auf diese Weise die in jedem Verflußpunkte der Veränderlichen zusammengedrängten innern Modificationen des Wachsens zu erkennen, und uns einen Blick in die verborgene Werkstätte desselben zu eröffnen, so sehen wir, daß diese Aufgabe jetzt gelöst ist. Denn diese auf den ersten Anblick sehr verwickelt erscheinende Aufgabe ist dadurch zur Erledigung gebracht, daß wir die Vorstellung einer solchen Veränderung des Wachsens auf gleiche Zunahmen, welche die abhängig Veränderliche in irgend einer Stufe der Differenzenbildung annimmt, zurückzuführen, und den Zahlenwerth dieser Zunahmen bei jeder gegebenen Function von x für jeden beliebigen Werth des x zu berechnen gelernt haben. Damit ist der ganze Inhaltreichthum, welcher im Begriffe des Wachsens liegt, erschlossen, und die allgemeine Analyse dieses Begriffes vollendet. Ehe wir jedoch zu speciellen Anwendungen übergehen, haben wir zunächst noch Folgerungen von ganz allgemeiner Natur, welche sich auf die Functionen überhaupt beziehen, aus den gewonnenen Begriffen zu entwickeln, und dieselben werden den Inhalt der beiden nächsten Capitel bilden.

Zehntes Capitel.

Näherungswerthe der Functionen durch gleichmäßig Wachsende in höheren Graden, oder die Taylor'sche, die Maclaurin'sche und andere Reihen.

§. 125.

Ein Jeder, der auch nur einen flüchtigen Blick in die höhere Mathematik geworfen hat, weiß, daß man unbekannte Functionen, welche eine durch gewisse Eigenschaften völlig bestimmte abhängig Veränderliche ausdrücken sollen, in Ermangelung einer andern adäquaten Form näherungsweise durch Potenzenreihen der willkürlich Veränderlichen oder eines Theiles der willkürlich Veränderlichen mit ganzen positiven Exponenten zu entwickeln pflegt, welche Potenzenreihen den Werth der abhängig Veränderlichen um so genauer angeben, je mehr Glieder der Reihe man zusammenaddirt. Dies will heißen, daß man Functionen, welche in allen Graden der Stärke des Wachsens ungleichmäßig wachsend sind, und bei denen die Regel des Wachsens niemals zum Abschluß zu bringen ist, näherungsweise durch andere Functionen ausdrückt, die in irgend einem höheren Grade gleichmäßig wachsend sind. Ziemlich lange vor der Entdeckung der Differential- und Integralrechnung hat man schon vielfältig solche Entwickelungen von Functionen bewerkstelligt durch Methoden, deren Zusammenhang mit den Begriffen und der Methode der Differential- und Integralrechnung wenigstens nicht unmittelbar einleuchtend ist. Nun haben wir schon in einzelnen Beispielen gesehen, daß eine

Allgem. Ausdruck einer in einem höheren Grade berührenden und in demselben Grade gleichmäßig wachsenden Function.

Potenzenreihe, d. h. eine in einem höheren Grade gleichmäßig wachsende Function, welche eine andere Function in demselben Grade berührt, einen Näherungswerth dieser zweiten Function abgeben kann, wenigstens innerhalb eines vom Berührungspunkte aus genommenen nicht allzugroßen Intervalles, wie z. B. die Ordinaten der parabolischen Linie dn Fig. 57, welche Linie in Bezug auf Ordinaten im dritten Grade gleichmäßig wachsend ist, und die Kreislinie im dritten Grade berührt, fast ganz mit den Ordinaten der Kreislinie zusammenfallen innerhalb des Intervalles bc der Abscisse. Es fragt sich also, wie die Potenzenreihen überhaupt, die einen Näherungswerth einer Function liefern, mit denjenigen Potenzenreihen zusammenhängen, in welchen die in irgend einem höheren Grade vorhandene Stärke des Wachsens dieser Function als zur Ausführung gekommen erscheint, welche letzteren Potenzenreihen doch ebenfalls einen Näherungswerth liefern können. Die Coefficienten derjenigen Potenzenreihen, welche eine in einem höheren Grade berührende Function ausdrücken, sind, wie aus den früheren Darstellungen ersichtlich, bestimmt durch die in den verschiedenen Graden stattfindende momentane Stärke des Wachsens, welche die berührte Function im Berührungspunkte hat, und es entsteht daher natürlich die Frage, ob nicht überhaupt die Coefficienten aller Potenzenreihen, welche einen Näherungswerth einer Function liefern, bestimmt sind durch die verschiedengradige Stärke des Wachsens, welche diese Function in irgend einem Verflußpunkte der willkürlich Veränderlichen hat. Es wird aber ferner, auch wenn diese Frage entschieden ist, außerdem noch festgestellt werden müssen, ob und in wiefern eine Function durch eine in einem höheren Grade gleichmäßig Wachsende mit beliebig großer Genauigkeit ausgedrückt werden könne, damit man einerseits nicht durch blindlings angenommenen uneingeschränkten Gebrauch solcher Potenzenreihen in die Irre geführt werde, anderseits nicht durch übertriebene Vorsicht sich zu sehr beengen lasse in dem Gebrauche derselben.

Um die vorgelegten Untersuchungen auszuführen, wird es vor allen Dingen nöthig sein, die Darstellung einer in irgend einem höheren Grade berührenden und zugleich gleichmäßig wachsenden Function, welche bisher nur in sehr speciellen Beispielen gegeben worden ist, zu verallgemeinern, und zwar so, daß sie sich erstens auf alle Grade der Berührung anwenden läßt, daß sie zweitens sich auf eine beliebige Function f(x), welche die in einem höheren Grade berührte Function vorstellen soll, bezieht, und daß sie drittens auf einen ganz beliebigen Berührungspunkt bezogen ist. Das zu dieser Darstellung anzuwendende Verfahren ist genau dasselbe, welches früher in den speciellen Beispielen angewendet worden ist, und kann durch den Rückblick auf jene Beispiele des Unfaßlichen, was solche abstracte Entwickelungen für Ungeübtere zu haben pflegen, leicht entkleidet werden. Es ist unbeschadet der Allgemeinheit gestattet, die ganze Darstellung der berührenden Function auf das anschauliche Bild von sich berührenden Linien zu beziehen.

Es sei die Ordinate einer Linie gegeben durch die Function f(x) der Abscisse x. An der Stelle der Linie, an welcher x den Zahlenwerth a hat, kann man sich eine in Bezug auf ihre Ordinaten in einem höheren Grade gleichmäßig wachsende und in demselben Grade berührende Linie denken. Es soll die Gleichung für die Ordinate y einer solchen etwa im fünften Grade berührenden Linie aufgestellt werden, wobei sich diese Gleichung auf dasselbe Coordinatensystem beziehen möge, welches der Ordinatengleichung der berührten Linie zu Grunde liegt. Die gesuchte Gleichung wird im Allgemeinen sein

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5$$

und es handelt sich darum, die unbestimmten Coefficienten A, B, C u. s. w. durch die als gegeben betrachtete Function f(x) und den Zahlenwerth a zu bestimmen. Da die Linien für den Werth a der willkürlich Veränderlichen sich im fünften Grade berühren sollen, so werden die Werthe,

welche die Function $f(x)$ und ihre fünf ersten Differentialquotienten für $x=a$ annehmen, und die durch $f(a)$, $\frac{df(a)}{dx}$, $\frac{d^2f(a)}{dx^2}$ u. s. w. zu bezeichnen sind, gleich sein den Werthen, welche die Function y und ihre fünf ersten Differentialquotienten für $x=a$ annehmen. Die Differentialquotienten der Function y sind der Reihe nach

$$B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+5Fx^4$$
$$1.2C+2.3Dx+3.4Ex^2+4.5Fx^3$$
$$1.2.3D+2.3.4Ex+3.4.5Fx^2$$
$$1.2.3.4E+2.3.4.5Fx$$
$$1.2.3.4.5F.$$

Nehmen wir die Werthe, in welche die Function y und ihre fünf ersten Differentialquotienten übergehen, sobald man der willkürlich Veränderlichen x einen gewissen Zahlenwerth a ertheilt, so können wir folgende Gleichungen bilden:

$$f(a)=A+Ba+Ca^2+Da^3+Ea^4+Fa^5$$
$$\frac{df(a)}{dx}=B+2Ca+3Da^2+4Ea^3+5Fa^4$$
$$\frac{d^2f(a)}{dx^2}=1.2C+2.3Da+3.4Ea^2+4.5Fa^3$$
$$\frac{d^3f(a)}{dx^3}=1.2.3D+2.3.4Ea+3.4.5Fa^2$$
$$\frac{d^4f(a)}{dx^4}=1.2.3.4E+2.3.4.5Fa$$
$$\frac{d^5f(a)}{dx^5}=1.2.3.4.5F.$$

Da wir sechs Gleichungen haben, so lassen sich die in denselben enthaltenen sechs unbestimmten Coefficienten ABCDEF bestimmen. Lösen wir daher diese Gleichungen so auf, daß wir die sechs Coefficienten als die gesuchten Unbekannten betrachten, so erhalten wir

$$F=\frac{1}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{d^5f(a)}{dx^5}$$
$$E=\frac{1}{1.2.3.4}\left[\frac{d^4f(a)}{dx^4}-\frac{d^5f(a)}{dx^5}\cdot\frac{a}{1}\right]$$

$$D = \frac{1}{1.2.3}\left[\frac{d^3 f(a)}{dx^3} - \frac{d^4 f(a)}{dx^4}\cdot\frac{a}{1} + \frac{d^5 f(a)}{dx^5}\cdot\frac{a^2}{1.2}\right]$$

$$C = \frac{1}{1.2}\left[\frac{d^2 f(a)}{dx^2} - \frac{d^3 f(a)}{dx^3}\cdot\frac{a}{1} + \frac{d^4 f(a)}{dx^4}\cdot\frac{a^2}{1.2} - \frac{d^5 f(a)}{dx^5}\cdot\frac{a^3}{1.2.3}\right]$$

$$B = \frac{1}{1}\left[\frac{df(a)}{dx} - \frac{d^2 f(a)}{dx^2}\cdot\frac{a}{1} + \frac{d^3 f(a)}{dx^3}\cdot\frac{a^2}{1.2} - \frac{d^4 f(a)}{dx^4}\cdot\frac{a^3}{1.2.3}\right.$$
$$\left. + \frac{d^5 f(a)}{dx^5}\cdot\frac{a^4}{1.2.3.4}\right]$$

$$A = fa - \frac{df(a)}{dx}\cdot\frac{a}{1} + \frac{d^2 f(a)}{dx^2}\cdot\frac{a^2}{1.2} - \frac{d^3 f(a)}{dx^3}\cdot\frac{a^3}{1.2.3}$$
$$+ \frac{d^4 f(a)}{dx^4}\cdot\frac{a^4}{1.2.3.4} - \frac{d^5 f(a)}{dx^5}\cdot\frac{a^5}{1.2.3.4.5}.$$

Führen wir diese für die unbestimmten Coefficienten gefundenen Werthe ein in die obige Function von x, welche für die Ordinate y der im fünften Grade berührenden Linie angenommen worden war, so erhalten wir

$$y = f(a) - \frac{df(a)}{dx}\cdot\frac{a}{1} + \frac{d^2 f(a)}{dx^2}\cdot\frac{a^2}{1.2} - \frac{d^3 f(a)}{dx^3}\cdot\frac{a^3}{1.2.3}$$
$$+ \frac{d^4 f(a)}{dx^4}\cdot\frac{a^4}{1.2.3.4} - \frac{d^5 f(a)}{dx^5}\cdot\frac{a^5}{1.2.3.4.5}$$
$$+ \left[\frac{df(a)}{dx} - \frac{d^2 f(a)}{dx^2}\cdot\frac{a}{1} + \frac{d^3 f(a)}{dx^3}\cdot\frac{a^2}{1.2} - \frac{d^4 f(a)}{dx^4}\cdot\frac{a^3}{1.2.3}\right.$$
$$\left. + \frac{d^5 f(a)}{dx^5}\cdot\frac{a^4}{1.2.3.4}\right]\frac{x}{1} + \left[\frac{d^2 f(a)}{dx^2} - \frac{d^3 f(a)}{dx^3}\cdot\frac{a}{1}\right.$$
$$\left. + \frac{d^4 f(a)}{dx^4}\cdot\frac{a^2}{1.2} - \frac{d^5 f(a)}{dx^5}\cdot\frac{a^3}{1.2.3}\right]\frac{x^2}{1.2}$$
$$+ \left[\frac{d^3 f(a)}{dx^3} - \frac{d^4 f(a)}{dx^4}\cdot\frac{a}{1} + \frac{d^5 f(a)}{dx^5}\cdot\frac{a^2}{1.2}\right]\frac{x^3}{1.2.3}$$
$$+ \left[\frac{d^4 f(a)}{dx^4} - \frac{d^5 f(a)}{dx^5}\cdot\frac{a}{1}\right]\frac{x^4}{1.2.3.4}$$
$$+ \frac{d^5 f(a)}{dx^5}\cdot\frac{x^5}{1.2.3.4.5} \quad (1)$$

Wir wollen, sowie wir bei dieser Reihe durch Beifügung der Zahl 1 gethan haben, die in diesem Capitel noch aufzustellenden verschiedenen Reihen numeriren, um sie auf diese Weise kurz bezeichnen zu können.

Die vorstehende Potenzenreihe von x ist, abgesehen von Linien und ihren Ordinaten, überhaupt der allgemeine Ausdruck einer im fünften Grade gleichmäßig wachsenden Function von x, welche mit einer beliebigen Function f(x) eine Berührung im fünften Grade eingeht bei demjenigen Functionswerthe, für welchen die willkürlich Veränderliche x den Zahlenwerth a hat. Obgleich die Coefficienten der einzelnen Potenzen von x aus einer ziemlichen Anzahl von Theilen zusammengesetzt erscheinen, so ist doch das Bildungsgesetz derselben so einfach und übersichtlich, daß man ohne Weiteres im Stande sein wird, die Formel durch Induction zu verallgemeinern, und auf beliebige höhere Grade der Berührung auszudehnen. Man braucht nämlich nur zu beachten, daß in den Coefficienten der einzelnen Potenzen von x die aufsteigenden Differentialquotienten von f(x) mit ihren für $x = a$ geltenden speciellen Werthen vorkommen, und daß diese Differentialquotienten zwar in allen Coefficienten aufsteigen bis zu der Rangzahl, welche den Grad der Berührung angibt, daß aber der Coefficient einer jeden Potenz von x anfängt mit dem gleichhohen Differentialquotienten. Das den Potenzen von x vorausgehende constante Glied enthält außer den sämmtlichen Differentialquotienten auch noch f(a). In allen Coefficienten der Potenzen von x sowol als in dem constanten Gliede der Formel haben die Bestandtheile abwechselnde Vorzeichen und der erste das Vorzeichen +, und in allen enthält der zweite Bestandtheil den Factor a, der dritte den Factor $\frac{a^2}{1.2}$, der vierte den Factor $\frac{a^3}{1.2.3}$ u. s. w. In diesen wenigen Bestimmungen ist das ganze Bildungsgesetz der Formel enthalten. Man wird bemerken, daß man, um die in irgend einem Grade berührende Function darzustellen, die berührte Function f(x) nicht zu kennen braucht, sondern daß man nur einen speciellen Werth f(a) derselben zu wissen braucht, und den ersten Differentialquotienten von f(x) allgemein ha-

ben muß, um die folgenden Differentialquotienten daraus abzuleiten.

Soll zunächst eine im ersten Grade gleichmäßig wachsende und im ersten Grade berührende Function dargestellt werden, z. B. die Ordinate der Tangente bei Parallelordinaten, so kommt in dem Ausdrucke derselben nur die erste Potenz von x vor, indem alle Differentialquotienten von f(x) vom zweiten an wegfallen, und man erhält

$$y = fa - \frac{df(a)}{dx}.a + \frac{df(a)}{dx}.x,$$

welches bekanntlich die allgemeine Gleichung der Tangente ist für eine krumme Linie, deren Ordinate durch f(x) ausgedrückt ist, und die in dem Punkte, für welchen die Abscisse gleich a ist, von der Tangente berührt wird.

Eine im zweiten Grade gleichmäßig wachsende und in demselben Grade berührende Function wird gegeben durch die Gleichung

$$y = f(a) - \frac{df(a)}{dx}.\frac{a}{1} + \frac{d^2f(a)}{dx^2}.\frac{a^2}{1.2} + \left[\frac{df(a)}{dx} - \frac{d^2f(a)}{dx^2}.\frac{a}{1}\right]\frac{x}{1} + \frac{d^2f(a)}{dx^2}.\frac{x^2}{1.2}.$$

Dies ist also auch die allgemeine Gleichung der Parabel, in deren Ordinaten die momentane Beschleunigung des Wachsens der Parallelordinaten einer Curve zur Ausführung kommt. Wir haben früher die Gleichungen einiger solcher Parabeln unmittelbar aus den Bedingungen der Aufgabe abgeleitet. Nimmt man statt der unbestimmten Function f(x) die in jenen Beispielen gegebenen bestimmten, und statt a den für den Berührungspunkt angenommenen Abscissenwerth, so werden die nach der vorstehenden Formel erhaltenen Functionen von x mit den dort gefundenen zusammenfallen.

Ebenso würde die früher für specielle Curven mühsam abgeleitete Gleichung einer in Bezug auf ihre Ordinaten im dritten Grade gleichmäßig wachsenden und im dritten Grade berührenden parabolischen Linie für jede Curve erhalten werden nach der Formel:

$$y = f(a) - \frac{df(a)}{dx} \cdot \frac{a}{1} + \frac{d^2f(a)}{dx^2} \cdot \frac{a^2}{1.2} - \frac{d^3f(a)}{dx^3} \cdot \frac{a^3}{1.2.3}$$
$$+ \left[\frac{df(a)}{dx} - \frac{d^2f(a)}{dx^2} \cdot \frac{a}{1} + \frac{d^3f(a)}{dx^3} \cdot \frac{a^2}{1.2}\right] \frac{x}{1}$$
$$+ \left[\frac{d^2f(a)}{dx^2} - \frac{d^3f(a)}{dx^3} \cdot \frac{a}{1}\right] \frac{x^2}{1.2} + \frac{d^3f(a)}{dx^3} \cdot \frac{x^3}{1.2.3}.$$

Was hier von Ordinaten krummer Linien gezeigt ist, gilt von den Functionen überhaupt, und sowie die Ordinate einer in einem höheren Grade berührenden Linie mit der Ordinate der berührten wenigstens in der Nähe des Berührungspunktes sehr nahe zusammenfallen kann, so wird auch allgemein die eine Function f(x) in einem höheren Grade berührende Function, d. h. der durch die Reihe (1) gegebene Ausdruck von y, ein Näherungswerth der Function f(x) sein können, wenigstens innerhalb gewisser Grenzen des vom Berührungspunkte aus genommenen Intervalles der willkürlich Veränderlichen. Die Bedingungen, unter welchen die berührende Function einen mit höheren Graden der Berührung immer genauer werdenden Näherungswerth der berührten Function angibt auch für solche Werthe von x, welche von a sehr verschieden sind, sowie die Bedingungen, unter welchen durch die Formel der berührenden Function ein Näherungswerth der berührten überhaupt nicht erhalten werden kann, sollen später untersucht und festgestellt werden. Vorläufig halten wir uns an die unmittelbar sich darbietende Vorstellung, daß es im Allgemeinen möglich ist, auf diesem Wege Näherungswerthe der Functionen zu erhalten.

Um ein Beispiel von wirklicher Berechnung eines Näherungswerthes nach unserer Formel zu geben, so nehmen wir an, man wollte den Logarithmus einer Zahl x durch eine Potenzenreihe von x annähernd berechnen. Wir wollen bei Bestimmung dieses Näherungswerthes nur bis zum dritten Grade der Berührung fortgehen. Die Function f(x) der allgemeinen Formel ist jetzt Lgx. Wenn B die Basis des angenommenen Logarithmensystems ist, so sind

die drei ersten Differentialquotienten der Function Lgx der Reihe nach $\frac{1}{lB}\cdot\frac{1}{x}$, $-\frac{1}{lB}\cdot\frac{1}{x^2}$ und $\frac{1}{lB}\cdot\frac{1.2}{x^3}$, wobei lB den natürlichen Logarithmus der Basis B vorstellt (s. §. 83). Die allgemeinen Ausdrücke $f(a)$ $\frac{df(a)}{dx}$, $\frac{d^2f(a)}{dx^2}$, $\frac{d^3f(a)}{dx^3}$ der Formel sind also in unserm Falle gegeben durch Lga, $\frac{1}{lB}\cdot\frac{1}{a}$, $-\frac{1}{lB}\cdot\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{lB}\cdot\frac{1.2}{a^3}$. Führen wir diese Werthe ein in die allgemeine Formel der im dritten Grade berührenden Function, und setzen wir diese erhaltene Function von x, als Näherungswerth von Lgx, ohne Weiteres diesem gleich, so haben wir

$$Lgx = Lga + \frac{1}{lB}\left[-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right] + \frac{1}{lB}\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\right]\frac{x}{1}$$
$$+\frac{1}{lB}\left[-\frac{1}{a^2}-\frac{2}{a^2}\right]\frac{x^2}{1.2}+\frac{1}{lB}\cdot\frac{1.2}{a^3}\cdot\frac{x^3}{1.2.3}.$$

Man wird von einer solchen nur im dritten Grade berührenden Function natürlich nicht mehr erwarten, als daß sie den Werth von Lgx mit einiger Genauigkeit angibt, sobald x nicht sehr verschieden von a ist. Es würde freilich leicht sein, diese Formel für den beliebigen mten Grad der Berührung aufzustellen, und dann erhielte man die Function Lgx ausgedrückt durch eine Potenzenreihe von x, welche auch für solche Werthe von x, die von a bedeutend abweichen innerhalb eines später noch genauer zu bestimmenden Spielraums, einen mit Vergrößerung der Zahl m ohne Ende genauer werdenden Näherungswerth von Lgx liefert. Nehmen wir an, es sollte nach der obigen Formel der gemeine Logarithmus einer Zahl berechnet werden, so ist statt $\frac{1}{lB}$ die Zahl $\frac{1}{l10}$ oder 0,434294... zu setzen. Die Zahl a muß so gewählt werden, daß Lga bekannt ist. Nehmen wir z. B. a=100, und folglich

$Lga=2$, und $x=101$, so erhalten wir nach der obigen Gleichung

$$Lg101 = 2 + 0{,}434294\left[-\frac{11}{6}+\frac{3}{100}\cdot\frac{101}{1}-\frac{3}{100^2}\cdot\frac{101^2}{1.2}\right.$$
$$\left.+\frac{1.2}{100^3}\cdot\frac{101^3}{1.2.3}\right].$$

Durch Ausrechnung dieses Ausdrucks erhalten wir $Lg101 = 2{,}0043213\ldots$ und sehen durch Vergleichung mit den Logarithmentafeln, daß wir auf diese Weise die sieben ersten Decimalstellen des Logarithmus von 101 richtig berechnet haben.

Wenn wir beurtheilen wollten, wie genau der Näherungswerth ist, den eine nach der Reihe (1) berechnete in einem höheren Grade berührende Function liefert, so müßten wir zusehen, um wie viel sich dieser Näherungswerth veränderte, wenn man die in dem nächsthöheren Grade berührende Function berechnete, wobei vorläufig vorausgesetzt wird, daß mit dem Grade der Berührung auch die Annäherung zunimmt. Hätte statt der im dritten Grade berührenden Function die im vierten Grade berührende berechnet werden sollen, so wäre, wie aus Reihe (1) zu ersehen, zu der ersteren Function noch hinzugekommen

$$\frac{d^4f(a)}{dx^4}\cdot\frac{a^4}{1.2.3.4}-\frac{d^4f(a)}{dx^4}\cdot\frac{a^3}{1.2.3}\cdot\frac{x}{1}+\frac{d^4f(a)}{dx^4}\cdot\frac{a^2}{1.2}\cdot\frac{x^2}{1.2}$$
$$-\frac{d^4f(a)}{dx^4}\cdot\frac{a}{1}\cdot\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{d^4f(a)}{dx^4}\cdot\frac{x^4}{1.2.3.4}$$

oder, weil der Factor $\frac{d^4f(a)}{dx^4}$ allen Gliedern gemeinschaftlich ist,

$$\frac{d^4f(a)}{dx^4}\left[\frac{a^4}{1.2.3.4}-\frac{a^3}{1.2.3}\cdot\frac{x}{1}+\frac{a^2}{1.2}\cdot\frac{x^2}{1.2}\right.$$
$$\left.-\frac{a}{1}\cdot\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}\right].$$

Da der in Klammern stehende Ausdruck nichts Anderes ist als $\frac{(x-a)^4}{1.2.3.4}$, so sieht man, daß zu dem beliebigen Werth

der im dritten Grade berührenden Function noch der Werth von $\frac{d^4 f(a)}{dx^4} \cdot \frac{(a-x)^4}{1.2.3.4}$ hinzugesetzt werden muß, um den entsprechenden Werth der im vierten Grade berührenden Function zu erhalten. In unserm Beispiel vom Logarithmus, wo der vierte Differentialquotient von Lgx gleich ist $-\frac{1}{lB} \cdot \frac{1.2.3}{x^4}$, und statt $\frac{d^4 f(a)}{dx^4}$ also zu setzen ist $-0{,}434294 \cdot \frac{1.2.3}{a^4}$, wird demnach, da $a = 100$ und $x = 101$ angenommen war, zu dem schon gefundenen Näherungswerth noch $-0{,}434294 \cdot \frac{1.2.3}{100^4} \cdot \frac{(101-100)^4}{1.2.3.4}$ oder $-0{,}434294 \cdot \frac{1}{4.100^4}$ zugefügt werden müssen. Da diese Zahl in den acht ersten Decimalstellen lauter Nullen hat, so kann der durch die im dritten Grade berührende Function gefundene Näherungswerth des Logarithmus von 101 durch weiter getriebene Annäherung erst in der achten Decimalstelle einen Zusatz erhalten.

§. 126.

Die Taylor'sche Reihe.

Die in dem vorhergehenden Paragraphen aufgestellte Potenzenreihe von x, die Reihe (1), durch welche allgemein die eine beliebige Function f(x) in einem höheren Grade berührende Function ausgedrückt ist, hat in dieser Form das Unbequeme, daß die Coefficienten der Potenzen von x sowol als das constante Glied der Reihe für jeden andern Grad der Berührung auch andere werden, indem man, um die im nächsthöheren Grade berührende Function darzustellen, zu jedem Gliede der Reihe noch einen Bestandtheil zusetzen muß. Betrachten wir aber die Summe dieser Zusätze für sich, so bemerken wir, daß sie auf eine sehr einfache Form gebracht werden kann, wodurch der Fortgang von einem Grade der Berührung zu einem an-

dern sehr erleichtert wird, was offenbar für den Gebrauch dieser Reihen, bei welchen je nach Bedürfniß der Grad der Berührung oft sehr verschieden genommen wird, sehr wünschenswerth ist. Um diese einfache Form des erwähnten Gesammtzusatzes zu finden, brauchen wir nur die successiven berührenden Functionen so aufzustellen, daß wir durch Zusetzung der fehlenden Bestandtheile von einer Function zur folgenden übergehen. Die im ersten Grade berührende Function ist

$$f(a) - \frac{df(a)}{dx}.\frac{a}{1} + \frac{df(a)}{dx}.\frac{x}{1}.$$

Vergleichen wir diese Function mit der im zweiten Grade berührenden, so sehen wir, daß zu der ersteren noch die Bestandtheile

$$\frac{d^2f(a)}{dx^2}.\frac{a^2}{1.2} - \frac{d^2f(a)}{dx^2}.\frac{a}{1}.\frac{x}{1} + \frac{d^2f(a)}{dx^2}.\frac{x^2}{1.2}$$

hinzutreten müssen, um die zweite zu bilden. Die im dritten Grade berührende Function geht hervor, wenn wir zu der im zweiten Grade berührenden noch folgende Bestandtheile zusetzen

$$-\frac{d^3f(a)}{dx^3}.\frac{a^3}{1.2.3} + \frac{d^3f(a)}{dx^3}.\frac{a^2}{1.2}.\frac{x}{1} + \frac{d^3f(a)}{dx^3}.\frac{a}{1}.\frac{x^2}{1.2}$$
$$- \frac{d^3f(a)}{dx^3}.\frac{x^3}{1.2.3}.$$

Um zu der im vierten Grade berührenden Function überzugehen, müßten wir zu der im dritten Grade berührenden zusetzen

$$\frac{d^4f(a)}{dx^4}.\frac{a^4}{1.2.3.4} - \frac{d^4f(a)}{dx^4}.\frac{a^3}{1.2.3}.\frac{x}{1} + \frac{d^4f(a)}{dx^4}.\frac{a^2}{1.2}.\frac{x^2}{1.2}$$
$$- \frac{d^4f(a)}{dx^4}.\frac{a}{1}.\frac{x^3}{1.2.3} + \frac{d^4f(a)}{dx^4}.\frac{x^4}{1.2.3.4}.$$

Das sehr einfache Bildungsgesetz eines solchen Zusatzes ist aus den vorliegenden Fällen hinlänglich einleuchtend. Da in allen Bestandtheilen eines jeden Zusatzes derselbe Differentialquotient von f(x) vorkommt, so können wir dieselben auch so schreiben

$$f(a)+\frac{df(a)}{dx}\left[-a+x\right]$$
$$+\frac{d^2f(a)}{dx^2}\left[\frac{a^2}{1.2}-\frac{a}{1}\cdot\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}\right]$$
$$+\frac{d^3f(a)}{dx^3}\left[-\frac{a^3}{1.2.3}+\frac{a^2}{1.2}\cdot\frac{x}{1}-\frac{a}{1}\cdot\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}\right]$$
$$+\frac{d^4f(a)}{dx^4}\left[\frac{a^4}{1.2.3.4}-\frac{a^3}{1.2.3}\cdot\frac{x}{1}+\frac{a^2}{1.2}\cdot\frac{x^2}{1.2}\right.$$
$$\left.-\frac{a}{1}\cdot\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}\right].$$

Je nachdem man in diesem Ausdrucke nur die erste Horizontalreihe, oder die Summe der ersten und zweiten, oder die Summe der ersten, zweiten und dritten nimmt u. s. w., hat man die im ersten, zweiten oder dritten Grade u. s. w. berührende Function. Man wird aber sogleich bemerken, daß die in Klammern stehenden Ausdrücke die Form von Potenzen eines Binoms haben, und zwar daß dieser Ausdruck in der ersten Horizontalreihe gleich $(x-a)^1$, in der zweiten gleich $\frac{1}{1.2}(x-a)^2$, in der dritten gleich $\frac{1}{1.2.3}(x-a)^3$ und in der vierten gleich $\frac{1}{1.2.3.4}(x-a)^4$ ist. Und da die Berechtigung der Fortsetzung dieser einfachen Bildungsregel augenfällig ist, so können wir eine die Function $f(x)$ in irgend einem höheren Grade berührende und in demselben Grade gleichmäßig wachsende Function y, statt in Form der Reihe (1), in folgender Form ausdrücken

$$y=f(a)+\frac{df(a)}{dx}\cdot\frac{x-a}{1}+\frac{d^2f(a)}{dx^2}\cdot\frac{(x-a)^2}{1.2}$$
$$+\frac{d^3f(a)}{dx^3}\cdot\frac{(x-a)^3}{1.2.3}\ldots.(2).$$

Hier haben wir nun einen Ausdruck der berührenden Function, welcher die größte Bequemlichkeit des Fortganges von einem Grade der Berührung zu einem nächsthöheren darbietet, da bei diesem Fortgange die Coefficienten der Potenzen von $(x-a)$ nicht verändert werden, sondern nur

das Product eines höheren Differentialquotienten und einer höheren Potenz von (x — a) zugesetzt wird. In sofern die berührende Function y bei Vermehrung der Anzahl ihrer Glieder eine unbegrenzte Annäherung an den Werth der berührten Function f(x) gestattet, setzt man auch beide Functionen ohne Weiteres gleich, und bildet die Gleichung

$$f(x)=f(a)+\frac{df(a)}{dx}.\frac{(x-a)}{1}+\frac{d^2f(a)}{dx^2}.\frac{(x-a)^2}{1.2}$$
$$+\frac{d^3f(a)}{dx^3}.\frac{(x-a)^3}{1.2.3}\ldots \text{ in inf. } (3).$$

Der Hauptunterschied der in den Reihen (1) und (2) dargestellten Formen einer die Function f(x) berührenden Function besteht darin, daß die Reihe (1) nach Potenzen der willkürlich Veränderlichen x der berührten Function fortschreitet, die Reihe (2) aber nach Potenzen eines Theiles (x — a) dieser willkürlich Veränderlichen, welcher Theil offenbar das vom Berührungspunkt aus gesetzte Intervall der willkürlich Veränderlichen ist, da nach Voraussetzung a derjenige Werth der willkürlich Veränderlichen ist, für welchen die Functionen f(x) und y gleiche Werthe und gleiche Differentialquotienten haben, d. h. für welchen die Berührung in einem höheren Grade stattfindet. Will man sich diesen Unterschied durch Linien veranschaulichen, so betrachte man in Fig. 57 die Kreislinie und die in einem höheren Grade berührende Linie kdp. Die Function, welche die Ordinate der Kreislinie ausdrückt, ist unser f(x), und diejenige, welche die Ordinate der berührenden ausdrückt, unser y in den Reihen (1) und (2). Sei im Punkte a der Nullpunkt der Abscisse x des Kreises, und finde für den Punkt b der Abscisse die Berührung statt, so daß der Werth der Linie ab das a unserer Formeln darstellt, so ist für eine beliebige Abscisse ag des Kreises die Ordinate y der berührenden Linie durch eine Function von ag gegeben in der Reihe (1), und durch eine Function von bg in der Reihe (2). Man kann demnach in Bezug auf Linien diesen Unterschied auch dadurch bezeichnen, daß man sagt, in der Reihe (1) sind

die Gleichungen der berührten und berührenden Linie auf dieselben Coordinatenachsen bezogen, in der Reihe (2) aber nicht, indem in der letzteren die Abscisse der berührenden Linie an der Stelle ihren Nullwerth hat, an welcher die Abscisse der berührten den Werth a hat. Durch eine Coordinatenverwandlung, und zwar durch eine bloße Verschiebung des Anfangspunktes der Abscisse um den Werth a, tritt also in der Gleichung der berührenden Linie diejenige große Vereinfachung ein, durch welche sich die Reihe (2) vor der Reihe (1) auszeichnet.

Wenn, wie in der Gleichung (3), die berührende Function der berührten f(x) gleichgesetzt wird, so schreibt man dieselbe gewöhnlich in einer andern etwas abweichenden Form. Nämlich man drückt das vom Berührungspunkte aus gesetzte Intervall der willkürlich Veränderlichen der berührten Function, d. h. die willkürlich Veränderliche der Berührenden, welche bisher durch $(x-a)$ bezeichnet wurde, durch ein einfaches Zeichen x aus, und die willkürlich Veränderliche der berührten Function durch $(a+x)$. Unter dieser Voraussetzung über die Bedeutung von x wird die Gleichung (3) geschrieben

$$f(a+x) = f(a) + \frac{df(a)}{dx}\cdot\frac{x}{1} + \frac{d^2f(a)}{dx^2}\cdot\frac{x^2}{1.2}$$

$$+ \frac{d^3f(a)}{dx^3}\cdot\frac{x^3}{1.2.3}\ldots\ldots(4).$$

Man nennt den Ausdruck einer in einem höheren Grade gleichmäßig wachsenden und in demselben Grade berührenden Function, in sofern er als Potenzenreihe des vom Berührungspunkte aus genommenen Intervalles der willkürlich Veränderlichen der berührten Function gegeben ist, die Taylor'sche Reihe, und die in den Gleichungen (3) und (4) enthaltene Behauptung, daß die berührende und berührte Function durch fortgesetzte Steigerung des Berührungsgrades der Gleichheit beliebig nahe gebracht werden können, den Taylor'schen Lehrsatz. In den früheren Zeiten scheint man diesem Lehrsatze eine bedingungslose Gel-

tung zugeschrieben zu haben. Wir werden jedoch in einem folgenden Paragraphen dieses Capitels sehen, daß er gewissen Einschränkungen unterworfen werden muß.

Wenn es Einem nur um die Aufstellung der Taylor'schen Reihe, als der einfachsten Form der in einem beliebigen, aber festen, nicht mit x veränderlichen Punkte berührenden Function, zu thun ist, so braucht man dieselbe nicht, wie hier geschehen, aus der Reihe (1) abzuleiten, sondern man kann sie unmittelbar auf demselben Wege wie die Reihe (1) erhalten, welcher Weg aber alsdann unter den bei der Taylor'schen Reihe gesetzten vereinfachenden Bedingungen viel kürzer wird. Es sei, um dies kurz darzustellen, die willkürlich Veränderliche einer Function durch $a+x$ und die Function selbst durch $f(a+x)$ ausgedrückt. Es soll eine in einem höheren Grade gleichmäßig wachsende Function gesucht werden, welche die Function $f(a+x)$ in demselben Grade berührt, und zwar an der Stelle, wo die willkürlich Veränderliche der berührten Function den Zahlenwerth a hat. Nehmen wir an, daß x die willkürlich Veränderliche der gesuchten Function sei, so hat dieselbe, als eine in einem höheren Grade gleichmäßig wachsende, im Allgemeinen die Form

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 \ldots$$

Die Werthe, welche diese Function und ihre successiven Differentialquotienten annehmen für $x=0$, sollen zusammenfallen mit den Werthen, welche die Function $f(a+x)$ und ihre Differentialquotienten annehmen für $x=0$, d. h. mit den Werthen $f(a)$, $\frac{df(a)}{dx}$, $\frac{d^2f(a)}{dx^2}$ u. s. w. Die successiven Differentialquotienten der durch unbestimmte Coefficienten ausgedrückten gesuchten Function sind der Reihe nach

$$B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 \ldots.$$
$$1.2C + 2.3.Dx + 3.4Ex^2 \ldots.$$
$$1.2.3D + 2.3.4Ex \ldots.$$
$$1.2.3.4E \ldots.$$

Für $x=0$ nimmt die gesuchte Function den Werth A, und

ihre vier Differentialquotienten nehmen der Reihe nach die Werthe B, 1.2.C, 1.2.3D und 1.2.3.4E an; und da diese Werthe, wie vorher gesagt, den Werthen von f(a), $\frac{df(a)}{dx}$, $\frac{d^2f(a)}{dx^2}$ u. s. w. gleich sein sollen, so erhalten wir die Gleichungen $A = f(a)$, $B = \frac{df(a)}{dx}$, $1.2C = \frac{d^2f(a)}{dx^2}$, $1.2.3D = \frac{d^3f(a)}{dx^3}$, $1.2.3.4E = \frac{d^4f(a)}{dx^4}$, und durch dieselben die unbestimmten Coefficienten ohne Weiteres ausgedrückt durch specielle Werthe der berührten Function und ihrer Differentialquotienten. Setzen wir die so erhaltenen Werthe von A, B, C, D, E in die oben angenommene Form der berührenden Function, so haben wir

$$y = f(a) + \frac{df(a)}{dx} \cdot \frac{x}{1} + \frac{d^2f(a)}{dx^2} \cdot \frac{x^2}{1.2} + \frac{d^3f(a)}{dx^3} \cdot \frac{x^3}{1.2.3} \ldots (5).$$

Verlangt man eine anschauliche Nachweisung des Werthes und der Bedeutung eines beliebigen Aggregats von Gliedern der Taylor'schen Reihe, oder eines einzelnen Gliedes derselben, so ist dieselbe leicht zu geben. Erstens ist für sich einleuchtend, daß ein vom Anfang der Reihe an genommenes Aggregat von Gliedern nichts weiter vorstellt, als diejenige Function, in welcher die momentane Stärke des Wachsens irgend eines Grades, die für den Werth a der willkürlich Veränderlichen einer Function vorhanden ist, zur Ausführung kommt, was wir früher in Bezug auf veränderliche Raumgrößen die Construction der momentanen Stärke des Wachsens eines Grades genannt haben. Nehmen wir z. B. die Summe der beiden ersten Glieder, so ist die Gleichung

$$y = f(a) + \frac{df(a)}{dx} \cdot \frac{x}{1}$$

allerdings auch die allgemeine Parallelordinatengleichung der Tangente einer krummen Linie, deren Ordinate $= f(x)$, aber unter der Voraussetzung, daß für den Berührungs-

punkt die Abscisse der Tangente den Nullwerth und die Abscisse der Curve den Werth a hat. Ebenso wird

$$y = f(a) + \frac{df(a)}{dx} \cdot \frac{x}{1} + \frac{d^2f(a)}{dx^2} \cdot \frac{x^2}{1.2}$$

die allgemeine Parallelordinatengleichung derjenigen Parabel sein, die in Bezug auf ihre Ordinaten gleichmäßig wachsend ist im zweiten Grade und eine andere Curve in demselben Grade berührt unter denselben Voraussetzungen in Betreff der Anfangspunkte der Abscissen der sich berührenden Linien. Die Summe der vier ersten Glieder der Taylor'schen Reihe stellt die Ordinate der in Bezug auf ihre Ordinaten im dritten Grade gleichmäßig wachsenden und in demselben Grade berührenden cubischen Parabel vor u. s. w. Wir sehen also, daß die früher auf einem etwas mühsamen Wege ausgeführten Constructionen der in einem bestimmten Punkte vorhandenen momentanen Stärke des Wachsens irgend eines Grades leichter hätten erhalten werden können, wenn wir gleich die Annahme gemacht hätten, daß der Anfangspunkt der Abscisse der berührenden Linie in den Berührungspunkt verlegt werden sollte.

Aus der Bedeutung eines vom Anfang an genommenen Aggregats von Gliedern der Taylor'schen Reihe geht auch die Bedeutung jedes einzelnen Gliedes derselben für sich hervor. So stellt z. B. das Glied $\frac{d^2f(a)}{dx^2} \cdot \frac{x^2}{1.2}$ den bei jedem Werthe von x vorhandenen Unterschied der Ordinaten der Parabel und der Tangente vor, und ebenso wird das Glied $\frac{d^3f(a)}{dx^3} \cdot \frac{x^3}{1.2.3}$ den Rest angeben, der übrig bleibt, wenn man die Ordinate der gemeinen Parabel von der Ordinate der cubischen Parabel abzieht u. s. w.

Oder betrachten wir noch die Constructionen der in verschiedenen Graden stattfindenden Stärke des Wachsens der Flächen. In Fig. 57 z. B. sind die Flächen construirt, welche für den Punkt b der Abscisse des Kreises die Kreisfläche im ersten, zweiten, dritten und vierten Grade berüh=

ren, und in denselben Graden gleichmäßig wachsend sind. Die Abscisse des Kreises habe wie früher ihren Nullpunkt im Punkt a. Das Stück ab derselben habe den Werth a, und ein vom Punkte b aus gerechnetes Abscissenstück den Werth x. Die Function der Abscisse, welche die Kreisfläche ausdrückt, sei durch $f(a+x)$ vorgestellt. Unter $f(a)$ haben wir also zu denken das Stück abd der Kreisfläche. Legen wir dem x den Werth der Linie bc bei, so ist $\frac{df(a)}{dx}\cdot\frac{x}{1}$ der Flächeninhalt des Parallelogramms dbcq, und $\frac{df(a)}{dx}\cdot\frac{x}{1}+\frac{d^2f(a)}{dx^2}\cdot\frac{x^2}{1.2}$ der Flächeninhalt des Paralleltrapezes dbco, wie aus den früher ausgeführten Constructionen dieser Flächen einleuchtend ist. Mithin stellt das Glied $\frac{d^2f(a)}{dx^2}\cdot\frac{x^2}{1.2}$ für sich allein den Flächeninhalt des Dreiecks dqo vor. Da ferner $\frac{df(a)}{dx}\cdot\frac{x}{1}+\frac{d^2f(a)}{dx^2}\cdot\frac{x^2}{1.2}+\frac{d^3f(a)}{dx^3}\cdot\frac{x^3}{1.2.3}$ das parabolische Flächenstück dbcp ausdrückt, so gibt $\frac{d^3f(a)}{dx^3}\cdot\frac{x^3}{1.2.3}$ den Flächeninhalt von dpo an. Aus denselben Gründen ist ersichtlich, daß das Glied $\frac{d^4f(a)}{dx^4}\cdot\frac{x^4}{1.2.3.4}$ das zwischen den Linien dn, dp und np enthaltene Flächenstück angibt.

Man wird aus diesen Beispielen entnehmen, daß es nicht die geringste Schwierigkeit hat, bei jeder beliebigen veränderlichen Raumgröße, deren Werth durch die Taylor'sche Reihe annähernd entwickelt ist, die geometrische Bedeutung sowol eines beliebigen Aggregats aufeinanderfolgender Glieder dieser Reihe als auch jedes einzelnen Gliedes für sich anzugeben.

Es mag noch schließlich bemerkt werden, daß die Reihe (4), da sie allgemein die eine Function $f(a+x)$ in einem höheren Grade berührende Function ausdrückt, auch gebraucht werden kann, um den Werth der berühren-

den Function auszudrücken für solche Werthe der willkürlich Veränderlichen, welche kleiner sind als a, oder welche vor dem Berührungspunkte liegen. Bezeichnen wir einen solchen Werth der willkürlich Veränderlichen durch $a-x$, indem x jetzt ein vom Berührungspunkte aus rückwärts genommenes Intervall der willkürlich Veränderlichen vorstellt, so werden wir den dem Werthe $(a-x)$ zugehörigen Werth der berührenden Function erhalten, wenn wir in der Reihe (4) überall $-x$ statt x setzen. Da die geraden Potenzen von x dadurch nicht verändert werden, und die ungeraden die entgegengesetzten Vorzeichen annehmen, so erhalten wir die Gleichung

$$f(a-x)=f(a)-\frac{df(a)}{dx}\cdot\frac{x}{1}+\frac{d^2f(a)}{dx^2}\cdot\frac{x^2}{1.2}$$
$$-\frac{d^3f(a)}{dx^3}\cdot\frac{x^3}{1.2.3}\cdots(6)$$

welche ebenso, wie die Gleichungen (3) und (4), unter dem Taylor'schen Lehrsatze inbegriffen ist.

§. 127.

Erläuterung des Gebrauchs des Taylor'schen Lehrsatzes.

In sofern die in Form der Taylor'schen Reihe ausgedrückte berührende Function eine unbegrenzte Annäherung an den Werth der berührten Function gestattet bei Steigerung des Berührungsgrades, was bei vielen Functionen für alle Werthe des x und a, bei andern nur innerhalb gewisser Grenzen dieser Werthe stattfindet, kann die Taylor'sche Reihe gebraucht werden, um aus dem direct gegebenen Differentialquotienten einer unbekannten Function diese Function selbst zu entwickeln. Denn ist uns der Differentialquotient einer unbekannten Function $f(x)$ allgemein als Function von x gegeben, so können wir aus demselben die folgenden Differentialquotienten von $f(x)$ durch Differentiation darstellen, und indem wir in diese Differentialquotienten statt x den bestimmten gegebenen Zahlenwerth a setzen, erhalten wir die Werthe der Ausdrücke $\frac{df(a)}{dx}$,

$\frac{d^2 f(a)}{dx^2}$ u. s. w. und in denselben die Coefficienten der einzelnen Potenzen des vom Berührungspunkte aus genommenen Intervalles der willkürlich Veränderlichen der unbekannten Function, welches Intervall, wie in den Reihen (2) und (4), nach Belieben durch $(x-a)$ oder durch x bezeichnet wird. Außerdem muß man aber, um eine numerisch völlig bestimmte Function durch die Taylor'sche Reihe zu erhalten, noch den speciellen Werth, den die unbekannte Function $f(x)$ für den Werth a der willkürlich Veränderlichen annimmt, wissen. Da jedoch der Werth a, für welchen die Berührung stattfinden soll, im Allgemeinen willkürlich ist, so heißt dies nur, man muß außer dem allgemein ausgedrückten Differentialquotienten der unbekannten Function noch irgend einen speciellen Werth derselben haben, auf welchen Letzteren man dann nur den Berührungspunkt der Functionen zu verlegen braucht, um in der Taylor'schen Reihe eine völlig bestimmte Function zu erhalten. Alles dies gilt auch von der Reihe (1). Man wird bemerken, daß die Darstellung einer unbekannten Function durch die Taylor'sche Reihe genau dieselben Data voraussetzt, als die Darstellung einer Function durch Integration. Denn wenn eine unbekannte Function durch Integration gefunden werden soll, so muß außer dem allgemeinen Ausdrucke des Differentialquotienten dieser Function ein specieller Werth derselben, den sie für einen beliebigen Werth der willkürlich Veränderlichen annimmt, gegeben sein, weil sich nur vermöge eines solchen speciellen Werthes der Function die Constante des Integrals bestimmen läßt. Die Entwickelung einer Function durch die Taylor'sche Reihe kann demnach auch als eine Art Integration durch Reihen betrachtet werden, und daß beide Verfahrungsweisen immer auf dasselbe Resultat führen müssen, werden wir in dem folgenden Paragraphen noch nachweisen.

Um den Gebrauch der Taylor'schen Reihe durch Beispiele zu erläutern, nehmen wir beliebige Functionen, deren

Differentialquotient auf irgend einem Wege ohne Kenntniß der Function gefunden ist. Der Differentialquotient von lx als des natürlichen Logarithmen einer Zahl x, z. B. ist $\frac{1}{x}$, und die folgenden Differentialquotienten sind der Reihe nach $-\frac{1}{x^2}$, $+\frac{1.2}{x^3}$, $-\frac{1.2.3}{x^4}$ u. s. w. Für den Werth a der willkürlich Veränderlichen der zu entwickelnden Function nehmen diese Function und ihre Differentialquotienten die Werthe la, $+\frac{1}{a}$, $-\frac{1}{a^2}$, $+\frac{1.2}{a^3}$, $-\frac{1.2.3}{a^4}$ u. s. w. an. Folglich wird, wenn wir die willkürlich Veränderliche der zu entwickelnden Function durch $(a+x)$ ausdrücken, nach dem Taylor'schen Lehrsatz

$$l(a+x) = la + \frac{1}{a}.\frac{x}{1} - \frac{1}{a^2}.\frac{x^2}{1.2} + \frac{1.2}{a^3}.\frac{x^3}{1.2.3} - \frac{1.2.3}{a^4}.\frac{x^4}{1.2.3.4}\ldots = la + \left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{x}{a}\right)^4\ldots$$

Setzen wir $a=1$, so erhalten wir

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\ldots$$

und somit dieselbe Reihe, welche wir in §. 80 aus $\frac{1}{1+x}$, als dem Differentialquotienten von $l(1+x)$, durch Integration hergeleitet haben.

Wäre gefordert, die Function $\sin x$ nach Potenzen eines Theils der willkürlich Veränderlichen zu entwickeln, so bildete man zuerst die Differentialquotienten von $\sin x$, und erhielte $\frac{d\sin x}{dx} = \cos x$, $\frac{d^2\sin x}{dx^2} = -\sin x$, $\frac{d^3\sin x}{dx^3} = -\cos x$, $\frac{d^4\sin x}{dx^4} = \sin x$ u. s. w. Die Differentialquo-

tienten der gesuchten Function $\sin x$ enthalten zwar diese Function selbst und eine von derselben abhängige $\cos x$ in sich; aber deswegen wird die durch die Taylor'sche Reihe bewerkstelligte Entwickelung von $\sin x$ doch keine Tautologie, weil ja die Differentialquotienten von $\sin x$ in dieser Reihe nicht mit ihren allgemeinen von der willkürlich Veränderlichen abhängigen Werthen, sondern mit speciellen Werthen enthalten sind. Die Ausdrücke $\frac{d f(a)}{dx}$, $\frac{d^2 f(a)}{dx^2}$, u. s. w. der allgemeinen Formel sind für die vorgelegte Function $\sin x$ durch $\cos a$, $-\sin a$, $-\cos a$ u. s. w. gegeben. Drücken wir die willkürlich Veränderliche der Function $\sin x$ durch $(a+x)$ aus, so haben wir

$$\sin(a+x) = \sin a + \cos a\,\frac{x}{1} - \sin a\,.\,\frac{x^2}{1.2} - \cos a\,.\,\frac{x^3}{1.2.3}$$
$$+ \sin a\,\frac{x^4}{1.2.3.4}\ldots$$

Um vermittelst dieser Gleichung den Sinus eines Bogens ausrechnen zu können, brauchen wir für a nur einen solchen Bogen anzunehmen, dessen Sinus wir kennen. Wäre z. B. $a = \frac{\pi}{4}$, so ist bekanntlich $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, oder wäre $a = \frac{\pi}{6}$, so ist $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ und $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Nehme ich also für den Werth $\frac{\pi}{6}$ des Bogens den Berührungspunkt der Functionen an, so wird die obige Gleichung

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{x}{1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{1.2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{x^3}{1.2.3}$$
$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{1.2.3.4}\ldots$$

Wenngleich nach dieser Formel der Sinus eines jeden Bogens berechnet werden kann, weil der Zahlenwerth jedes Bogens unter $\frac{\pi}{6} + x$ oder $\frac{\pi}{6} - x$ begriffen ist, so sieht

man doch, daß die Reihe nur dann durch eine geringe Anzahl ihrer Glieder den Sinus mit hinreichender Genauigkeit darstellen kann, wenn die Zahl x ein kleiner Bruch ist, oder wenn der allgemeine Werth $\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$ des Bogens in die Nähe des speciellen Werthes $\frac{\pi}{6}$ fällt, für welchen die Berührung der Functionen stattfindet. Sollte z. B. der Sinus des Bogens von 31° berechnet werden, so hat man, da der Bogen von $30° = \frac{\pi}{6}$, und der Bogen von $1° = \frac{\pi}{180}$ ist, in der letzten Gleichung statt x die Zahl $\frac{\pi}{180}$ zu setzen, und erhält

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180}-\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{\pi}{180}\right)^2}{1.2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\left(\frac{\pi}{180}\right)^3}{1.2.3}\cdots$$

Die Summe der vier ersten Glieder dieser Reihe, d. h. die den Sinus nur im dritten Grade berührende Function, gibt die acht ersten Decimalstellen des Sinus von 31° schon richtig an.

Obgleich die hauptsächlichste Anwendung des Taylor'schen Lehrsatzes darin besteht, eine ihrer arithmetischen Zusammensetzung nach unbekannte Function, deren Differentialquotient gegeben ist, zu entwickeln, so kann derselbe doch auch gebraucht werden, um die bei gegebenen Functionen vorgeschriebenen auflösenden Operationen in zusammensetzende zu verwandeln, und auf bloße Potenzirung der bestimmenden Zahlen zurückzuführen. Da indessen bei auflösenden Operationen, die mit einer Zahl vorzunehmen sind, diejenige arithmetische Verknüpfung der bestimmenden Zahl mit andern constanten Zahlen, welche das Resultat der Auflösung angibt, durch die bloße Forderung einer bestimmten auflösenden Operation unmittelbar nicht gegeben ist, so kann die

Darstellung dieser arithmetischen Verknüpfung gewissermaßen auch als die Entwickelung einer unbekannten Function angesehen werden. Wenn z. B. eine Zahl in gleiche Factoren zerfällt werden soll, so kann gefragt werden, wie man diese Zerfällung auf eine Zusammensetzung aus Potenzen eines Theils der zu zerfällenden Zahl zurückführen kann. Wäre z. B. die Quadratwurzel aus einer Zahl zu ziehen, also $\sqrt{x}$ die zu entwickelnde Function, so sind die Differentialquotienten derselben der Reihe nach $\frac{1}{2\sqrt{x}}, -\frac{1}{2.2(\sqrt{x})^3}$ $+\frac{1.3}{2.2.2(\sqrt{x})^5}, -\frac{1.3.5}{2.2.2.2(\sqrt{x})^7}$ u. s. w. Drücken wir die willkürlich Veränderliche unserer Function durch $a+x$ aus, so haben wir nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$\sqrt{(a+x)} = \sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}.\frac{x}{1} - \frac{1}{2.2(\sqrt{a})^3}.\frac{x^2}{1.2}$$
$$+ \frac{1.3}{2.2.2(\sqrt{a})^5}.\frac{x^3}{1.2.3}.$$

Wenn wir vorläufig voraussetzen, was später noch bewiesen werden soll, daß diese Reihe für alle Werthe von x, welche kleiner als a sind, einen Näherungswerth der Quadratwurzel von $(a+x)$ liefert, so braucht man die Zahl a nur so zu wählen, daß man die Quadratwurzel aus a weiß, und daß a größer ist als x, und wird durch diese Gleichung die Quadratwurzel jeder Zahl erhalten können, und demnach die Zerfällung in Factoren auf eine bloße Zusammensetzung von Factoren und Theilen zurückführen können. Um z. B. die Quadratwurzel aus 11 zu ziehen, setzt man $9+2$ statt 11, oder die Zahl a der Formel $=9$ und $x=2$, und erhält

$$\sqrt{(9+2)} = 3 + \frac{1}{2.3}.2 - \frac{1}{2.2.3^3}.\frac{2^2}{1.2} + \frac{1.3}{2.2.2.3^5}.\frac{2^3}{1.2.3}\cdots$$
$$= 3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{54} + \frac{1}{486} - \cdots$$

Wenn man die Function A^x, welche für gebrochene

Werthe von x ebenfalls auflösende Operationen enthält, lieber in einer Form hat, die blos zusammensetzende Operationen enthält, so kann ihr eine solche Form durch die Taylor'sche Reihe leicht gegeben werden. Die successiven Differentialquotienten der Function A^x sind $lA.A^x$, $(lA)^2.A^x$, $(lA)^3 A^x$ u. s. w. Wird die willkürlich Veränderliche unserer Function durch $a+x$ ausgedrückt, so haben wir nach dem Taylor'schen Lehrsatz

$$A^{(a+x)} = A^a + (lA)A^a.\frac{x}{1} + (lA)^2 A^a.\frac{x^2}{1.2} + (lA)^3 A^a.\frac{x^3}{1.2.3} \cdots$$

Setzen wir in dieser Formel $a=o$, was offenbar gestattet ist, weil wir für jeden Werth der willkürlich Veränderlichen, also auch für den Nullwerth derselben eine in einem höheren Grade berührende Function denken können, so erhalten wir

$$A^x = 1 + (lA)\frac{x}{1} + (lA)^2.\frac{x^2}{1.2} + (lA)^3.\frac{x^3}{1.2.3} \cdots$$

und somit dieselbe Gleichung, welche wir in §. 84 auf anderem Wege gefunden haben.

In dem einzigen Falle, daß in der Potenzfunction x^m der Exponent eine ganze positive Zahl ist, wird die Entwickelung der Function in eine Potenzenreihe eines Theiles der willkürlich Veränderlichen nach dem Taylor'schen Lehrsatz keine unendliche Reihe und keinen bloßen Näherungswerth, sondern eine geschlossene Reihe und einen adäquaten Werth liefern. In diesem Falle ist aber auch die zu entwickelnde Function selbst schon eine im mten Grade gleichmäßig wachsende, und braucht also überhaupt nicht erst durch eine gleichmäßig Wachsende berechnet zu werden; vielmehr wird ihre Entwickelung nur eine analytische Gleichung liefern, die als solche die Berechnung des Werthes der Function nicht zum Zwecke hat. Durch die Anwendung des Taylor'schen Lehrsatzes auf die Function x^m erhält man den binomischen Lehrsatz, wie aus der wirklichen Ausführung

ersichtlich. Die Differentialquotienten der Function x^m sind mx^{m-1}, $m(m-1).x^{m-2}$, $m(m-1)(m-2)x^{m-3}$ u. s. w. Drückt man die willkürlich Veränderliche der Potenzfunction durch $a+x$ aus, und setzt die Werthe, in welche die Function x^m und ihre Differentialquotienten für $x=a$ übergehen, als das constante Glied und die constanten Coefficienten der Potenzen des Theiles x der willkürlich Veränderlichen, so erhält man

$$(a+x)^m = a^m + m.a^{m-1}.\frac{x}{1} + m(m-1).a^{m-2}.\frac{x^2}{1.2}$$
$$+ m(m-1)(m-2)a^{m-3}.\frac{x^3}{1.2.3}\cdots$$

Daß man, abgesehen von dem Zwecke der Berechnung des Werthes einer Function, den Taylor'schen Lehrsatz auch betrachten kann als ein allgemeines Mittel zur Aufstellung analytischer Gleichungen, in welchen irgend eine Function einer zweitheiligen Größe $f(a+x)$ durch eine Zusammensetzung von Functionen des ersten Theils a und von Potenzen des zweiten Theils x ausgedrückt erscheint, ist für sich klar; und ebenso, daß jede analytische Gleichung der Art durch Anwendung der Taylor'schen Reihe muß gefunden werden können, mag nun der Ausdruck, welcher der Function des Binoms identisch ist, in geschlossener Form darstellbar sein oder nicht. Betrachten wir z. B. die oben aufgestellte Gleichung

$$\sin(a+x) = \sin a + \cos a\frac{x}{1} - \sin a.\frac{x^2}{1.2} - \cos a.\frac{x^3}{1.2.3}$$
$$+ \sin a.\frac{x^4}{1.2.3.4} + \cos a.\frac{x^5}{1.2.3.4.5}\cdots$$

und nehmen die Glieder, welche den Factor $\sin a$ oder $\cos a$ gemeinschaftlich haben, zusammen, so erhalten wir

$$\sin(a+x) = \sin a\left[1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4}\cdots\right]$$
$$+ \cos a\left[x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5}\cdots\right]$$

Da die in Klammern stehenden Potenzenreihen von x

bekanntlich Ausdrücke von cos x und sin x sind, so haben wir

$$\sin(a+x)=\sin a.\cos x+\cos a.\sin x$$

und mithin die bekannte analytische Gleichung, in welcher der Sinus der Summe zweier Zahlen durch den Sinus und Cosinus dieser Zahlen ausgedrückt erscheint.

§. 128.

Die Maclaurin'sche Reihe.

Eine in einem höheren Grade gleichmäßig wachsende und in demselben Grade berührende Function kann natürlich auch für den Nullwerth der willkürlich Veränderlichen der berührten Function ihren Berührungspunkt haben, und es werden dann in der Taylor'schen Reihe statt der Ausdrücke $f(a)$, $\frac{df(a)}{dx}$, $\frac{d^2f(a)}{dx^2}$, diejenigen Werthe dieser Functionen zu setzen sein, in welche sie für den Nullwerth der willkürlich Veränderlichen übergehen, und die durch $f(o)$, $\frac{df(o)}{dx}$, $\frac{d^2f(o)}{dx^2}$ u. s. w. zu bezeichnen sind. Die Reihe (4) und ebenso die Reihe (3) wird also für $a=o$ sich so darstellen

$$f(x)=f(o)+\frac{df(o)}{dx}.\frac{x}{1}+\frac{d^2f(o)}{dx^2}.\frac{x^2}{1.2}$$
$$+\frac{d^3f(o)}{dx^3}.\frac{x^3}{1.2.3}\ldots.(7).$$

Obgleich eigentlich kein Grund vorhanden ist, den Fall, in welchem die Berührung der Functionen für den Nullwerth der willkürlich Veränderlichen stattfindet, von den Fällen, in welchen die Berührung für einen andern Werth a statthat, zu unterscheiden, so führt doch die im Nullpunkt berührende Function herkömmlich einen besonderen Namen, und heißt die Maclaurin'sche Reihe. Nur für den äußeren Anblick scheint eine wesentliche Verschiedenheit darin zu liegen, daß in der Maclaurin'schen Reihe eine Function in einer Potenzenreihe des ganzen Zahlenwerthes

der willkürlich Veränderlichen, in der Taylor'schen aber in einer Potenzenreihe nur eines Theiles der willkürlich Veränderlichen entwickelt erscheint. In der Maclaurin'schen Reihe fallen die Nullwerthe der willkürlich Veränderlichen zusammen, in der Taylor'schen aber nicht, oder in sofern man diesen Unterschied für Linien bezeichnen will, so sind in der Maclaurin'schen Reihe die Gleichungen der sich berührenden Linien auf dieselben Coordinatenachsen bezogen, in der Taylor'schen aber nicht. Natürlich hat die Maclaurin'sche Reihe, da sie sich auf einen seinem Zahlenwerthe nach bestimmten Berührungspunkt bezieht, für jede Function ganz unveränderliche nur durch die Natur der Function bestimmte Coefficienten, während die Coefficienten der Taylor'schen Reihe von der Natur der Function sowol als von dem Werthe der beliebigen Zahl a abhängen.

Soll eine unbekannte Function durch die Maclaurin'sche Reihe entwickelt werden, so muß außer dem speciellen Werthe, den die Function für den Nullwerth der willkürlich Veränderlichen annimmt, auch der Differentialquotient der Function allgemein gegeben sein. Um z. B. die Function $\cos x$ in einer Potenzenreihe von x darzustellen, reicht es hin zu wissen, daß $\cos(o) = 1$ und daß $-\sin x$ der Differentialquotient von $\cos x$ ist. Da die Differentialquotienten von $\cos x$ der Reihe nach sind $-\sin x$, $-\cos x$, $+\sin x$, $+\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$ u. s. w., und dieselben für $x = 0$ der Reihe nach die Werthe $0, -1, 0, +1, 0, -1$ u. s. w. annehmen, so erhält man

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} \cdots;$$

welche Reihe schon in §. 91 auf anderem Wege gefunden worden ist.

Sollte, um ein zweites Beispiel zu geben, die Function e^x in eine Potenzenreihe von x umgeformt werden, so erhält man, da alle Differentialquotienten von e^x gleich e^x sind, und demnach für $x = 0$ die Function sowol als ihre sämmtlichen Differentialquotienten den Werth $+1$ annehmen,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} \dots$$

und somit die in §. 82 gefundene Reihe.

Es läßt sich leicht zeigen, daß wenn eine Function f(x) überhaupt durch eine Potenzenreihe von x mit constanten Coefficienten in unbegrenzter Annäherung darstellbar ist, alsdann die Coefficienten dieser auf welchem Wege auch immer erhaltenen Potenzenreihe niemals andere sein können als diejenigen, welche die Maclaurin'sche Reihe gibt. Denn wären die constanten Coefficienten einer solchen Reihe gleich A, B, C, D u. s. w., so müßte für jeden beliebigen Werth von x der Werth der ins Unendliche fortgesetzten Reihe $A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ u. s. w. mit dem Werthe von f(x) genau zusammenfallen. Ebenso wird jeder Differentialquotient der unendlichen Reihe mit dem entsprechenden Differentialquotienten von f(x) gleichen Werth haben für jeden beliebigen Werth von x, und folglich auch für den Nullwerth. Für $x = 0$ hat aber die angenommene Potenzenreihe den Werth A, und f(x) den Werth f(o), folglich $A = f(o)$. Da ferner für $x = 0$ der erste Differentialquotient der Potenzenreihe den Werth B, der zweite den Werth 1.2.C, der dritte den Werth 1.2.3D annimmt, und diese Werthe den Ausdrücken $\frac{df(o)}{dx}$, $\frac{d^2f(o)}{dx^2}$, $\frac{d^3f(o)}{dx^3}$ gleich sein sollen, so hat man $B = \frac{df(o)}{dx}$, $C = \frac{1}{1.2} \cdot \frac{d^2f(o)}{dx^2}$, $D = \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{d^3f(o)}{dx^3}$, wodurch die obige Behauptung erwiesen ist. Wenn wir zurückblicken auf die Art, wie im vorhergehenden Paragraphen die Reihe (5), als Ausdruck einer berührenden Function, welche nach Potenzen eines Theiles der willkürlich Veränderlichen fortschreitet, aus einer vorausgesetzten Potenzenreihe mit unbestimmten Coefficienten abgeleitet ist, so sehen wir, daß von der Taylor'schen Reihe dasselbe gilt, was von der Maclaurin'schen, und daß bei jeder auf irgend einem Wege ausgeführten Entwickelung

einer Function in einer Potenzenreihe eines Theiles der willkürlich Veränderlichen, die constanten Coefficienten immer dieselben sein müssen, welche man durch Anwendung des Taylor'schen Lehrsatzes erhält, sobald nur der andere Theil der willkürlich Veränderlichen in beiden Fällen denselben Zahlenwerth hat.

Es ist in den Einleitungsworten dieses Capitels gesagt, daß die niedere Analysis Potenzenreihen, oder in einem höheren Grade gleichmäßig wachsende Functionen als Näherungswerthe von andern Functionen entwickelt durch Methoden, deren Zusammenhang mit den Begriffen und Methoden der Differential- und Integralrechnung nicht unmittelbar einleuchtend ist, und es ist daselbst die Frage aufgeworfen worden, ob nicht überhaupt die Coefficienten aller Potenzenreihen, welche einen Näherungswerth einer Function liefern, bestimmt sind durch die verschiedengradige Stärke des Wachsens, welche diese Function in irgend einem Verflußpunkte der willkürlich Veränderlichen hat. Diese Frage ist nun, wenigstens für solche Potenzenreihen von x, deren Coefficienten nicht mit x oder mit der Anzahl der Glieder der Reihe veränderlich sind, durch das Vorhergehende beantwortet. Wenn wir aber nun sehen, daß in allen Fällen, in welchen eine Function von x durch eine unendliche Potenzenreihe von x oder eines Theiles von x mit constanten Coefficienten sich darstellen läßt, die Coefficienten dieser Potenzen ins Unendliche hin völlig bestimmt sind durch die unendlich vielen Grade der Stärke des Wachsens, welche die zu entwickelnde Function in Einem Verflußpunkte zusammengedrängt enthält, so wird man zugeben, daß alle in der niederen Analysis zur Entwickelung solcher Potenzenreihen angewandten Methoden mehr oder weniger künstliche Umwege sein müssen, da sie nicht auf den Begriff des Wachsens, und der verschiedenen Grade der Stärke desselben, welche doch allein maßgebend für diese Entwickelungen sind, basirt werden. In der That ist bei allen Functionen, in sofern sie durch Potenzenreihen darstellbar sind, der ganze folgende

Verlauf des Wachsens vorherbestimmt durch die in Einem Verflußpunkte vorhandenen Bestrebungen zu wachsen, welche nicht zur Ausführung kommen, und jeder Verflußpunkt enthält involvirt oder potentia die ganze Entwickelung der Größe in sich. Die Differentialrechnung schärft in Betreff der Natur des Wachsens unser Auge so, daß wir in dem noch auf Einen Punkt zusammengezogenen Keime schon das ganze Gewächs erblicken.

Mit der obigen Behauptung, daß die constanten Coefficienten jeder Potenzenreihe von x, welche eine Function f(x) mit unbegrenzter Annäherung darstellt, keine anderen sein können, als diejenigen, welche die Maclaurin'sche Reihe liefert, scheint die Reihe (1) im Widerspruch zu stehen; zwar nicht in sofern, als die Reihe (1) nur in einer bestimmten Anzahl von Gliedern dargestellt ist, denn in diesem Falle sind ihre Coefficienten nicht constant, sondern mit der Anzahl der Glieder veränderlich, aber in sofern, als diese Reihe ins Unendliche fortgesetzt gedacht wird, wodurch die Coefficienten derselben selbst unendliche Reihen werden. Ist nämlich f(x) eine Function, welche durch die Maclaurin'sche Reihe darstellbar ist, so werden die Coefficienten der zur Entwickelung von f(x) gebrauchten Reihe (1) sich mit Vermehrung der Glieder der Reihe bestimmten Grenzwerthen nähern, und für die ins Unendliche fortgesetzt gedachte Reihe in constante Zahlen übergehen. Und hierbei scheint es nun, daß f(x) in einer Potenzenreihe von x mit constanten Coefficienten entwickelt sei, die nicht mit den Coefficienten der Maclaurin'schen Reihe zusammenfallen. Aber dieser Schein ist leicht zu beseitigen. Denn wenn man in der Reihe (6) a statt x setzt, so findet man, daß die Entwickelung von f(a—a) den Ausdruck

$$f(a) - \frac{df(a)}{dx} \cdot \frac{a}{1} + \frac{d^2f(a)}{dx^2} \cdot \frac{a^2}{1.2} - \frac{d^3f(a)}{dx^3} \cdot \frac{a^3}{1.2.3} \cdots$$

oder das Anfangsglied der Reihe (1) gibt, und folglich ist das ins Unendliche fortgesetzte Anfangsglied der Reihe (1) gleich $f(a-a) = f(o)$. Der Coefficient von x in der

Reihe (1) enthält eine gewisse Anzahl von Gliedern der Reihe

$$\frac{df(a)}{dx} - \frac{d^2f(a)}{dx^2} \cdot \frac{a}{1} + \frac{d^3f(a)}{dx^3} \cdot \frac{a^2}{1.2} - \frac{d^4f(a)}{dx^4} \cdot \frac{a^3}{1.2.3} \cdots$$

Die Function $\frac{df(a+x)}{dx}$ läßt sich natürlich so gut als die Function $f(a+x)$ nach der Taylor'schen Reihe entwickeln. Wenn man nun die Function $\frac{df(a-x)}{dx}$ nach der Reihe (6) entwickelt, und überall a statt x setzt, so sieht man, daß die Entwickelung von $\frac{df(a-a)}{dx}$ die einzelnen Bestandtheile des Coefficienten von x in der Reihe (1) liefert und folglich ist dieser Coefficient, in sofern die Reihe, welche ihn darstellt, ins Unendliche fortgesetzt wird, gleich $\frac{df(a-a)}{dx} = \frac{df(o)}{dx}$. Ebenso ist der Beweis für die Coefficienten der folgenden Potenzen von x. Die Coëfficienten der Maclaurin'schen Reihe bilden demnach die Grenzen, welchen sich die Coefficienten der Reihe (1) bei Vermehrung der Glieder dieser Reihe ohne Ende nähern.

In den Fällen, in welchen die Coefficienten der Maclaurin'schen Reihe zur Berechnung des Werthes einer Function unbrauchbar werden, weil sie unendliche Werthe annehmen, sind die in der Reihe (1) enthaltenen Näherungswerthe dieser Coefficienten noch sehr wohl zur Berechnung der Function zu gebrauchen. Wollte man z. B. die Function lx durch die Maclaurin'sche Reihe berechnen, so würden die Functionen $+\frac{1}{x}$, $-\frac{1}{x^2}$, $+\frac{1.2}{x^3}$, $-\frac{1.2.3}{x^4}$ u. s. w., als die successiven Differentialquotienten von lx, sämmtlich unendlich groß werden für $x=0$, und man erhielte die nichtssagende Gleichung

$$lx = -\infty + \infty \cdot \frac{x}{1} - \infty \cdot \frac{x^2}{1.2} \cdots$$

welche zwar an sich nichts Falsches enthält, aber in unbe-

stimmbarer Form erscheint. Dasselbe würde eintreten, wenn man z. B. irgend eine Wurzel aus x durch die Maclaurin'sche Reihe finden wollte. Aber nichts desto weniger läßt sich vermittelst der Reihe (1) der Logarithmus jeder Zahl x durch eine Potenzenreihe von x mit jedem beliebigen Grade von Genauigkeit ausdrücken, sobald man nur den Werth a der willkürlich Veränderlichen, für welchen die Berührung der Functionen statthat, größer als die Hälfte von x nimmt, was ja immer möglich ist. Statt der unendlichgroßen Coefficienten der Maclaurin'schen Reihe erhält man in der Reihe (1) Coefficienten, welche durch Vermehrung der Glieder der Reihe über jede vorgeschriebene Grenze hinaus vergrößert werden können, und dabei nimmt die Annäherung des Werthes der Reihe an den Werth von lx unbegrenzt zu. Mithin muß man annehmen, daß auch die Grenzwerthe, welchen sich diese Coefficienten nähern, nämlich die Coefficienten der Maclaurin'schen Reihe, ein richtiges, wenngleich verschwimmendes Resultat liefern.

§. 129.

Die Bernoulli'sche Reihe.

Sowie man aus der in der Reihe (4) enthaltenen Entwickelung von $f(a+x)$ die Maclaurin'sche Reihe erhält, indem man den Anfangspunkt des x bis in den Nullpunkt der willkürlich Veränderlichen zurückschiebt, oder das a verschwinden läßt, so erhält man auch aus der in der Reihe (6) enthaltenen Entwickelung von $f(a-x)$ eine besondere Reihe, indem man das vom Werthe a der willkürlich Veränderlichen rückwärts genommene Intervall x bis zum Nullpunkte der willkürlich Veränderlichen wachsen läßt, oder x gleich a setzt. Man hat alsdann

$$f(a-a) \text{ oder } f(o)=f(a)-\frac{df(a)}{dx}\frac{a}{1}+\frac{d^2f(a)}{dx^2}\cdot\frac{a^2}{1.2}$$

$$-\frac{d^3f(a)}{dx^3}\cdot\frac{a^3}{1.2.3}\cdots$$

und folglich

$$f(a) = f(o) + \frac{df(a)}{dx} \cdot \frac{a}{1} - \frac{d^2f(a)}{dx^2} \cdot \frac{a^2}{1.2}$$
$$+ \frac{d^3f(a)}{dx^3} \cdot \frac{a^3}{1.2.3} \ldots\ldots$$

Da a hier überhaupt einen beliebigen Werth der willkürlich Veränderlichen vorstellt, welcher nicht als ein einzelner Bestimmter dem fließenden Werthe der willkürlich Veränderlichen entgegengesetzt erscheint, so kann man, der in solchen Fällen üblichen Schreibart sich anschließend, die vorstehende Gleichung auch schreiben

$$f(x) = f(o) + \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{x}{1} - \frac{d^2f(x)}{dx^2} \cdot \frac{x^2}{1.2}$$
$$+ \frac{d^3f(x)}{dx^3} \cdot \frac{x^3}{1.2.3} \ldots\ldots (8).$$

Diese Reihe, die zwar gewöhnlich auf anderem Wege und in anderem Zusammenhange abgeleitet wird, die aber als Ausdruck einer in einem höheren Grade berührenden und in demselben Grade gleichmäßig wachsenden Function hierher gehört, heißt die Bernoulli'sche. Das wesentlich Unterscheidende dieser Entwickelung einer Function f(x) in einer Potenzenreihe von x von den früheren besteht darin, daß die Coefficienten der Potenzen von x nicht constant sind wie in der Reihe (7), auch nicht veränderlich mit dem Berührungsgrade wie in der Reihe (1), sondern daß sie mit x selbst veränderlich sind.

Es fragt sich aber zunächst, in welchem Sinne die Bernoulli'sche Reihe Ausdruck einer die Function f(x) in einem höheren Grade berührenden Function ist. Um ihre Bedeutung in dieser Rücksicht nachzuweisen, brauchen wir nur zurückzublicken auf die Art, wie wir dieselbe soeben aus der Reihe (6) abgeleitet haben. Wir wollen diesen Nachweis an dem Bilde von Ordinaten krummer Linien führen. Die Abscisse be (Fig. 64) der krummen Linie gip habe im Punkte b ihren Nullpunkt. Das Abscissenstück bc habe den Werth a. Denkt man sich für den Werth a der willkürlich Veränderlichen, also im Curven-

punkte i eine in Bezug auf ihre Ordinaten in einem höheren Grade berührende und in demselben Grade gleichmäßig wachsende Linie gezogen, so wird, wenn wir das vom Punkte c aus rückwärts genommene Intervall cf mit x bezeichnen, die Ordinate fh durch f(a—x) zu bezeichnen sein. Indem wir voraussetzen, daß die die Ordinate ausdrückende Function für die hier genommenen Werthe des a und des x durch die Taylor'sche Reihe berechnet werden kann, so wird die Ordinate fh oder f(a—x) durch die Reihe (6) adäquat ausgedrückt und wir haben

$$f(a-x)=f(a)-\frac{df(a)}{dx}\cdot\frac{x}{1}+\frac{d^2f(a)}{dx^2}\cdot\frac{x^2}{1.2}-\frac{d^3f(a)}{dx^3}\cdot\frac{x^3}{1.2.3}\cdots\cdots$$

Da das constante Glied f(a) die Ordinate ci vorstellt, so werden die übrigen Glieder der Reihe zusammengenommen die Abnahme im ausdrücken, welche die Ordinate der im Punkte i berührenden Linie dadurch erfahren hat, daß man die Abscisse vom Werthe a um die Zahl x hat abnehmen lassen. (Es versteht sich, daß die mit Ausschluß von f(a) zusammengenommenen Glieder unserer Reihe sowol die Zunahme als die Abnahme ausdrücken können, welche die Ordinate der im Punkte i berührenden Linie durch das Abnehmen der Abscisse erhält, und es soll der Einfachheit des Ausdrucks wegen nur der eine Fall bei dieser Erläuterung zu Grunde gelegt werden.) Geben wir den mit Ausschluß von f(a) genommenen Gliedern unserer Reihe die entgegengesetzten Vorzeichen, so drücken sie die Zunahme aus, welche die Ordinate der im Punkte i berührenden Linie dadurch erhält, daß die Abscisse von f bis c, oder vom Werthe (a—x) aus um die Zahl x wächst. Lassen wir die Abscisse abnehmen von c bis b, oder setzen wir in f(a—x) das x=a, so wird f(a—a) oder f(o) die Ordinate bg des Nullpunktes der im Punkte i berührenden Linie ausdrücken, und in der Gleichung

$$f(a-a)=f(a)-\frac{df(a)}{dx}\cdot\frac{a}{1}+\frac{d^2f(a)}{dx^2}\cdot\frac{a^2}{1.2}-\frac{d^3f(a)}{dx^3}\cdot\frac{a^3}{1.2.3}\cdots\cdots$$

ist bg gegeben durch ci — in, indem fa = ci, und $\left[-\frac{df(a)}{dx}.\frac{a}{1}+\frac{d^2f(a)}{dx^2}.\frac{a^2}{1.2}\ldots\right]=-\text{in}$ ist. Nehmen wir in dem Ausdrucke von — in die entgegengesetzten Vorzeichen, so drückt $\frac{df(a)}{dx}.\frac{a}{1}-\frac{d^2f(a)}{dx^2}.\frac{a^2}{1.2}\ldots$ die Zunahme aus, welche die Ordinate der im Punkte i berührenden Linie erhält, indem man die Abscisse von o bis a wachsen läßt. Indem man die vorstehende Gleichung umformt in die Gleichung

$$f(a)=f(o)+\frac{df(a)}{dx}.\frac{a}{1}-\frac{d^2f(a)}{dx^2}.\frac{a^2}{1.2}+\frac{d^3f(a)}{dx^3}.\frac{a^3}{1.2.3}$$

welche eben die Bernoulli'sche Reihe ist, so sieht man, daß f(a) oder ci ausgedrückt erscheint durch bg + in. Demnach ist auch in der Bernoulli'schen Reihe eine beliebige Ordinate ci näherungsweise ausgedrückt durch die Ordinate einer in einem höheren Grade berührenden Linie, und zwar so, daß die Ordinate des Berührungspunktes selbst erhalten wird, indem man zu der Ordinate des Nullpunktes hinzuaddirt die Zunahme, welche die Ordinate der Berührenden erhält, indem man die Abscisse wachsen läßt vom Nullpunkte bis zu demjenigen Punkt, für welchen die Berührung statthat.

Vergleichen wir die Bernoulli'sche Reihe mit der Maclaurin'schen, so drücken, wenn bc das x und ci das f(x) vorstellt, beide Reihen den Werth von f(x) aus durch bg + ni, d. h. durch f(o) plus der Zunahme, welche die Ordinate einer Berührenden durch das Wachsen der Abscisse vom Nullwerthe bis zum Werthe x bekommt; der Unterschied beider Reihen besteht aber darin, daß bei der Maclaurin'schen Reihe der Berührungspunkt in den Anfangspunkt von x, und bei der Bernoulli'schen in den Endpunkt von x verlegt ist. Was hier von der Berührung in Bezug auf Ordinaten gesagt ist, gilt von der Berührung der Functionen überhaupt.

Es wäre nicht nöthig gewesen, wie bisher immer geschehen, die Bernoulli'sche Reihe in der Beschränkung zu

nehmen, daß gerade f(o) und nicht überhaupt f(a) das constante Glied der Reihe ist, welches dieselbe Beschränkung ist, die der Maclaurin'schen Reihe im Vergleich zur Taylor'schen anhaftet. Setzen wir nämlich nochmals im Punkte b Fig. 64 den Nullpunkt der Abscisse, das Stück bc=a und ce=x, so können wir ep oder f(a+x) gegeben denken durch ci oder f(a) und qp, und zwar kann qp bestimmt werden durch die Zunahme, welche die Ordinate einer im Punkte p berührenden Linie erhält durch das Wachsen der Abscisse vom Werth a bis zum Werthe a+x. Die Werthe, welche die Differentialquotienten der berührten Function für den Endpunkt von x, oder für den Punkt p annehmen, sind durch $\frac{df(a+x)}{dx}$, $\frac{d^2f(a+x)}{dx^2}$ u. s. w. zu bezeichnen. Gemäß der Reihe (6) ist, wenn wir für den Werth a+x eine Berührende denken, f[(a+x)—x] oder f(a) gegeben durch

$$f(a+x)-\frac{df(a+x)}{dx}\cdot\frac{x}{1}+\frac{d^2f(a+x)}{dx^2}\cdot\frac{x^2}{1.2}$$
$$-\frac{d^3f(a+x)}{dx^3}\cdot\frac{x^3}{1.2.3}\cdots$$

Folglich stellt der Ausdruck

$$-\frac{df(a+x)}{dx}\cdot\frac{x}{1}+\frac{d^2f(a+x)}{dx^2}\cdot\frac{x^2}{1.2}-\frac{d^3f(a+x)}{dx^3}\cdot\frac{x^3}{1.2.3}\cdots$$

die Abnahme pq vor, welche die Ordinate einer im Punkte p Berührenden dadurch erfährt, daß die Abscisse von a+x bis zu a abnimmt. Die Glieder dieses Ausdrucks mit entgegengesetztem Vorzeichen genommen drücken also die Zunahme aus, welche die Ordinate der in p Berührenden durch das Wachsen der Abscisse von a bis zu a+x erhält. Und diese Zunahme zu ci oder f(a) addirt, gibt f(a+x), so daß wir haben

$$f(a+x)=f(a)+\frac{df(a+x)}{dx}\cdot\frac{x}{1}-\frac{d^2f(a+x)}{dx}\cdot\frac{x^2}{1.2}$$
$$+\frac{d^3f(a+x)}{dx^2}\cdot\frac{x^3}{1.2.3}\cdots(9).$$

Wenn man, wie es Recht ist, als das wesentlich Unterscheidende der Bernoulli'schen Reihe dies betrachtet, daß die berührende Function, deren Zunahme zu einem gegebenen Werthe der zu entwickelnden Function zugesetzt den Werth dieser Letzteren ausdrückt, ihren Berührungspunkt hat bei demjenigen Functionswerthe, welcher gerade berechnet werden soll, so kann man die Reihe (9) ebenfalls die Bernoulli'sche nennen, und zwar die Bernoulli'sche in ihrer allgemeineren Form. Setzt man in der Reihe (9) $a=o$, so geht sie wieder in die gewöhnliche Bernoulli'sche über, wie unter derselben Annahme die Taylor'sche in die Maclaurin'sche.

Um den Gebrauch der Reihe (9) durch ein Beispiel zu erläutern, so nehmen wir an, man wollte den gemeinen Logarithmus einer Zahl durch dieselbe berechnen. Man muß dabei den Werth von a so wählen, daß man Lga kennt. Die Differentialquotienten der Function Lgx sind $\frac{1}{l10}\cdot\frac{x}{1}$, $-\frac{1}{l10}\cdot\frac{1}{x^2}$, $+\frac{1}{l10}\cdot\frac{1.2}{x^3}$ u. s. w., und für den Werth $a+x$ der willkürlich Veränderlichen nehmen dieselben die Werthe $\frac{1}{l10}\cdot\frac{1}{a+x}$, $-\frac{1}{l10}\cdot\frac{1}{(a+x)^2}$ u. s. w. an. Setzen wir diese Werthe statt $\frac{df(a+x)}{dx}$, $\frac{d^2f(a+x)}{dx^2}$ u. s. w. in die Gleichung (9), so erhalten wir

$$Lg(a+x) = Lga + \frac{1}{l10}\left[\frac{1}{a+x}\cdot\frac{x}{1} + \frac{1}{(a+x)^2}\cdot\frac{x^2}{1.2} + \frac{1.2}{(a+x)^3}\cdot\frac{x^3}{1.2.3}\cdots\right] = Lga + \frac{1}{l10}\left[\frac{x}{a+x} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a+x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{a+x}\right)^3\cdots\right]$$

und dadurch eine allgemeingültige Formel, welche für jeden beliebigen positiven Werth von a und x den Logarithmus angibt. Sollte z. B. der gemeine Logarithmus der Zahl 11 berechnet werden, so setzt man $a=10$ und $x=1$, und er-

hält, indem man zugleich den bekannten Werth von $\frac{1}{l10}$ setzt,

$$Lg\,11 = 1 + 0{,}434294\left[\frac{1}{11} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{11}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{11}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{11}\right)^4 \cdots\right]$$

Daß man auch $f(a-x)$ ausdrücken könne durch $f(a)$ weniger der Zunahme, welche eine bei dem Werthe $(a-x)$ der willkürlich Veränderlichen berührende Function dadurch erhält, daß man die willkürlich Veränderliche von $a-x$ bis zu a wachsen läßt, versteht sich von selbst, und es wird nach den vorausgegangenen Erläuterungen keiner besonderen Nachweisung der Richtigkeit der Gleichung

$$f(a-x) = f(a) - \frac{df(a-x)}{dx} \cdot \frac{x}{1} - \frac{d^2f(a-x)}{dx^2} \cdot \frac{x^2}{1.2} - \frac{d^3f(a-x)}{dx^3} \cdot \frac{x^3}{1.2.3} \cdots \quad (10)$$

bedürfen. Diese Gleichung kann man auch unmittelbar aus der Taylor'schen Reihe, nämlich aus der Reihe (4) ableiten, und zwar durch eine bloße Veränderung der Bedeutung, welche die Buchstaben a und x in der Reihe (4) haben. Drückt man nämlich in der Reihe (4) den Werth der willkürlich Veränderlichen der berührten Function, für welchen die Berührung stattfinden soll, durch $(a-x)$ statt durch a aus, und folglich den Werth $a+x$ der Reihe (4) durch $a-x+x$, oder durch a aus, so stellt sich die Gleichung (4) folgendermaßen dar:

$$f(a) = f(a-x) + \frac{df(a-x)}{dx} \cdot \frac{x}{1} + \frac{d^2f(a-x)}{dx^2} \cdot \frac{x^2}{1.2} + \frac{d^3f(a-x)}{dx^3} \cdot \frac{x^3}{1.2.3} \cdots$$

aus welcher durch bloße Transposition die Reihe (10) sich ergibt.

Die Bernoulli'sche Reihe leidet an einem Uebelstande, welcher die Sphäre ihrer Brauchbarkeit außerordentlich

einschränkt. Denn in den Coefficienten der Potenzen von x sind die Differentialquotienten der zu entwickelnden Function f(x) enthalten mit den Werthen, welche sie für den veränderlichen Werth x selbst annehmen. Wenn nun eine Function von der Art ist, daß in den Differentialquotienten derselben die Function selbst wieder enthalten ist, wie z. B. die Functionen $x^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{1}{3}}$, a^x, $\sin x$, so sieht man, daß in der durch die Bernoulli'sche Reihe gegebenen Entwickelung einer solchen Function f(x) diese Function mit ihrem allgemeinen unbestimmten Werth f(x) und nicht mit einem speciellen Werth f(a) vorkommt, und man demnach ein zu entwickelndes Unbekanntes durch dieses Unbekannte ausgedrückt erhält. So z. B. würde man für die Function sin x durch die Reihe (8) die unnütze Gleichung erhalten

$$\sin x = 0 + \cos x . \frac{x}{1} + \sin x . \frac{x^2}{1.2} - \cos x . \frac{x^3}{1.2.3} \ldots .$$

Offenbar haftet derselbe Uebelstand auch an der Bernoulli'schen Reihe in ihren allgemeineren durch die Gleichungen (9) und (10) dargestellten Formen. Dieser Umstand hat es veranlaßt, daß man überhaupt diejenigen Potenzenreihen von x, in denen die Coefficienten mit x veränderlich sind, wenig oder gar nicht beachtet hat. Nichts desto weniger können, wie wir sogleich sehen werden, solche Potenzenreihen sehr brauchbar sein, und sogar eine weitere Sphäre ihrer Gültigkeit haben als die Taylor'sche Reihe, sobald man sie nur so anlegt, daß die Differentialquotienten der zu entwickelnden Function f(x) oder f(a + x) nicht gerade für den Werth x oder a + x der willkürlich Veränderlichen, sondern für einen andern übrigens mit x selbst veränderlichen Werth der willkürlich Veränderlichen zu nehmen sind.

§. 130.

Andere Reihen für $f(x)$ mit von x abhängigen Coefficienten.

Mit Ausnahme der Reihe (1) lassen sich alle bisher betrachteten Reihen auf zwei Hauptfälle reduciren. Nämlich die in einem höheren Grade berührende und in demselben Grade gleichmäßig wachsende Function, durch welche der Werth einer Function $f(a+x)$ ausgedrückt werden soll, hat entweder im Anfangspunkt oder im Endpunkt von x ihren Berührungspunkt, wobei der Fall, daß $a=o$ ist, nicht besonders unterschieden zu werden braucht, und in beiden Fällen wird $f(a+x)$ so ausgedrückt, daß zu einem schon bekannten speciellen Werth $f(a)$ der Function eine dem Intervall x zugehörige Zunahme der berührenden Function zugesetzt wird, welche Zunahme durch eine Potenzenreihe des Intervalles x dargestellt erscheint. In der ersten Klasse von Reihen sind die Coefficienten der Potenzen von x nur von dem speciellen Werthe a abhängig, und für ein bestimmtes a constant bei allen beliebigen Werthen des veränderlichen Intervalles x. In der zweiten Klasse von Reihen sind die Coefficienten der Potenzen von x von dem Werth $a+x$ abhängig, und folglich mit dem veränderlichen Intervall x selbst veränderlich. Die Reihe (1), welche zugleich die allgemeinste ist, da aus derselben alle übrigen mit Leichtigkeit abgeleitet werden können, hat in dieser Beziehung eine isolirte Stellung, und bildet gewissermaßen eine Klasse für sich. Denn in derselben sind die Coefficienten der Potenzen von x weder constant bei bestimmtem Werth von a, noch auch mit x veränderlich, sondern mit dem Berührungsgrade veränderlich. Diese Reihe hat außerdem das Unterscheidende, daß sie nicht nach Potenzen eines von einem gewissen Werthe a aus genommenen Intervalles der willkürlich Veränderlichen fortschreitet, sondern nach Potenzen des Gesammtwerthes der willkürlich Veränderlichen, obgleich der Werth der willkürlich Veränderlichen, für welchen die Berührung der Functionen statthat, nicht gerade der Nullwerth, sondern ein beliebiger Werth a ist.

Gehen wir zurück auf die beiden erst erwähnten Klassen von Reihen, so ist es, wenn man für einen Werth a den zugehörigen Werth der Function kennt, gar nicht nöthig, den Berührungspunkt der berührenden Function gerade in den Anfang oder das Ende des vom Werthe a aus genommenen Intervalles zu verlegen, sondern derselbe kann auch in das Innere dieses Intervalles verlegt werden, und dennoch die dem Intervalle zugehörige Zunahme der berührenden Function, welche dem Werthe f(a) zugesetzt werden muß, gefunden werden. Ist der Werth der willkürlich Veränderlichen, für welchen die Berührung stattfinden soll, a plus einem bestimmten aliquoten Theil des veränderlichen Intervalles, so ist der Berührungspunkt veränderlich, und folglich sind auch die für den Berührungspunkt genommenen Werthe der Differentialquotienten der berührten Function, d. h. die Coefficienten der Potenzenreihe veränderlich.

Wir wollen die Entstehung und Bedeutung einer solchen Reihe erst anschaulich an den Coordinaten einer Linie nachweisen. Sei in b Fig. 64 der Nullpunkt der Abscisse, bc=a und be=x, und die Ordinate pe=f(x), so wird, wenn d der Mittelpunkt des Intervalles ce ist, de sowol als cd gleich $\frac{x-a}{2}$, und bd=$\frac{x+a}{2}$ sein. Denken wir für den Werth $\frac{x+a}{2}$ der willkürlich Veränderlichen im Punkte k eine berührende Linie. Die Ordinate pe oder f(x) kann ausgedrückt werden durch ci oder f(a) und die Summe von kr und ps. Das Stück ps ist aber die Zunahme, welche die Ordinate der in k berührenden Linie erhält, indem die willkürlich Veränderliche vom Werthe $\frac{x+a}{2}$ um das Intervall $\frac{x-a}{2}$ wächst, und kr wird erhalten, wenn man die der Abnahme dc zugehörige Abnahme der Ordinate der im Punkt k berührenden mit entgegengesetztem Vorzeichen nimmt. Indem man die Abscisse vom Werthe

bd oder $\frac{x+a}{2}$ aus um de oder $\frac{x-a}{2}$ wachsen läßt, erhält man nach Gleichung (4)

$$pe=f\left(\frac{x+a}{2}\right)+\frac{df\left(\frac{x+a}{2}\right)}{dx}.\left(\frac{x-a}{2}\right)$$
$$+\frac{d^2f\left(\frac{x+a}{2}\right)}{dx^2}.\frac{\left(\frac{x-a}{2}\right)^2}{1.2}+\ldots.$$

Da $kd=f\left(\frac{x+a}{2}\right)$ ist, so hat man pe—kd oder

$$ps=\frac{df\left(\frac{x+a}{2}\right)}{dx}.\left(\frac{x-a}{2}\right)+\frac{d^2f\left(\frac{x+a}{2}\right)}{dx^2}.\frac{\left(\frac{x-a}{2}\right)^2}{1.2}$$
$$+\frac{d^3f\left(\frac{x+a}{2}\right)}{dx^3}.\frac{\left(\frac{x-a}{2}\right)^3}{1.2.3}+\ldots.$$

Indem man ferner die Abscisse vom Werthe bd oder $\frac{x+a}{2}$ aus um cd oder $\frac{x-a}{2}$ abnehmen läßt, erhält man nach Gleichung (6)

$$ci=f\left(\frac{x+a}{2}\right)-\frac{df\left(\frac{x+a}{2}\right)}{dx}.\left(\frac{x-a}{2}\right)$$
$$+\frac{d^2f\left(\frac{x+a}{2}\right)}{dx^2}.\frac{\left(\frac{x-a}{2}\right)^2}{1.2}-\ldots.$$

und folglich ci—kd oder

$$-kr=-\frac{df\left(\frac{x+a}{2}\right)}{dx}\left(\frac{x-a}{2}\right)+\frac{d^2f\left(\frac{x+a}{2}\right)}{dx}\frac{\left(\frac{x-a}{2}\right)^2}{1.2}$$
$$-\frac{d^3f\left(\frac{x+a}{2}\right)}{dx^3}.\frac{\left(\frac{x-a}{2}\right)^3}{1.2.3}\ldots.$$

Wird dieser letzte Ausdruck mit entgegengesetztem Vorzeichen genommen, und zu ps addirt, so erhält man pq, und zwar

$$pq = 2\left[\frac{df\left(\frac{x+a}{2}\right)}{dx}\cdot\left(\frac{x-a}{2}\right)+\frac{d^3f\left(\frac{x+a}{2}\right)}{dx^3}\cdot\frac{\left(\frac{x-a}{2}\right)^3}{1.2.3}+\ldots\right]$$

Und da $ci + pq$ oder $fa + pq = f(x)$, so hat man

$$f(x) = f(a) + 2\left[\frac{df\left(\frac{x+a}{2}\right)}{dx}\cdot\left(\frac{x-a}{2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{d^3f\left(\frac{x+a}{2}\right)}{dx^3}\cdot\frac{\left(\frac{x-a}{2}\right)^3}{1.2.3}+\ldots\right] \quad (11).$$

Man kann diese Reihe, obgleich sie nur die ungeraden Potenzen von $\frac{x-a}{2}$ enthält, und die Differentialquotienten von ungerader Rangzahl der Function $f(x)$ zu Coefficienten hat, dennoch als Ausdruck einer für den Werth $\frac{x+a}{2}$ der willkürlich Veränderlichen in allen Graden berührenden Function ansehen, indem der zu $f(a)$ zugefügte Bestandtheil die Summe von Zunahmen einer solchen berührenden Function ist, und zwar von Zunahmen, welche dadurch entstehen, daß man die willkürlich Veränderliche vom Berührungspunkte aus vorwärts und rückwärts um gleiche Theile wachsen läßt. Es ist aber auch gestattet, die Reihe (11) so zu betrachten, daß der ganze in Klammern stehende Ausdruck die der Zunahme $\frac{x-a}{2}$ der willkürlich Veränderlichen zugehörige Zunahme einer Function darstellt, welche für den Werth $\frac{x+a}{2}$ der willkürlich Veränderlichen die Function $f(x)$ so berührt, daß sie zwar die Differentialquotienten von ungerader Rangzahl mit der Function $f(x)$ gemeinschaftlich hat, daß aber ihre Differentialquotienten von gerader Rangzahl sämmtlich gleich Null sind. Man könnte eine solche Function, welche mit einer andern Function abwechselnd einen Differentialquotienten gemeinschaftlich hat, und den nächsten nicht, eine sprungweise berührende Function

nennen. Aus der Reihe (11) ersieht man, daß allgemein bei einer Function, welche eine Function f(x) in der Weise dieser Reihe sprungweise berührt, die der Zunahme $\frac{x-a}{2}$ zugehörige Zunahme der Function doppelt genommen näherungsweise die der doppelten Zunahme x—a zugehörige Zunahme der Function f(x) angibt. Läßt sich eine Function f(x), für welche man den speciellen Werth f(a) weiß, durch die Taylor'sche Reihe und durch die Reihe (11) annähernd berechnen, so wird die Reihe (11) im Allgemeinen immer stärker convergirend sein als die Taylor'sche, weil die Taylor'sche nach Potenzen von x—a und die Reihe (11) nach Potenzen von $\frac{x-a}{2}$ fortschreitet, ohne daß die Letztere in Bezug auf die Coefficienten dieser Potenzen ungünstiger gestellt wäre.

Um den Gebrauch der Reihe (11) durch ein Beispiel zu erläutern, so wählen wir nochmals die schon durch mehrere andere Formeln entwickelte Function lx (natürlicher Logarithmus). Setzt man in die Differentialquotienten dieser Function statt der willkürlich Veränderlichen x den Werth $\frac{x+a}{2}$, so nehmen die Coefficienten $\frac{df\left(\frac{x+a}{2}\right)}{dx}$, $\frac{d^3f\left(\frac{x+a}{2}\right)}{dx^3}$, $\frac{d^5f\left(\frac{x+a}{2}\right)}{dx^5}$ u. s. w. der Reihe (11) respective die Werthe $\frac{1}{\frac{x+a}{2}}$, $\frac{1.2}{\left(\frac{x+a}{2}\right)^3}$, $\frac{1.2.3.4}{\left(\frac{x+a}{2}\right)^5}$ an. Folglich ist

$$lx = la + 2\left[\frac{1}{\frac{x+a}{2}} \cdot \frac{x-a}{2} + \frac{1.2}{\left(\frac{x+a}{2}\right)^3} \cdot \frac{\left(\frac{x-a}{2}\right)^3}{1.2.3} + \frac{1.2.3.4}{\left(\frac{x+a}{2}\right)^5} \cdot \frac{\left(\frac{x-a}{2}\right)^5}{1.2.3.4.5} \cdots\right]$$

$$lx = la + 2\left[\frac{x-a}{x+a} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^5 + \ldots\right]$$

Die Berechnung des natürlichen Logarithmus durch diese Reihe, welche wie leicht zu sehen für jeden beliebigen positiven Werth von x und a convergirend ist, setzt also nur voraus, daß man den natürlichen Logarithmus von irgend einer Zahl a wisse. Da in jedem Logarithmensystem der Logarithmus von 1 gleich Null ist, so erhält man, indem man $a=1$ nimmt, die Gleichung

$$lx = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \ldots\right]$$

welche Gleichung wir schon im §. 81 auf anderem Wege gefunden haben, und der man es unmittelbar nicht ansieht, daß sie so gut als die Entwickelung durch die Taylor'sche Reihe eigentlich eine Function darstellt, welche die Function lx berührt an der Stelle, wo die willkürlich Veränderliche den Werth $\frac{x+1}{2}$ hat.

In sofern man die Reihe (11) nur aus andern bekannten Reihen ableiten will, ohne nach der Bedeutung derselben als Ausdruck einer berührenden Function zu fragen, so kann dieselbe auf folgendem kurzen Wege erhalten werden. Zieht man nämlich die Reihe (6) von der Reihe (4) ab, so erhält man

$$f(a+x) = f(a-x) + 2\left[\frac{df(a)}{dx}\cdot\frac{x}{1} + \frac{d^3f(a)}{dx^3}\cdot\frac{x^3}{1.2.3} + \frac{d^5f(a)}{dx^5}\cdot\frac{x^5}{1.2.3.4.5}\ldots\right]$$

Drückt man die Veränderliche $a+x$ durch ein einfaches Zeichen einer Veränderlichen, durch z aus, und den Werth $a-x$, für welchen man den Werth der Function $f(z)$ wissen muß, durch den Buchstaben b, so folgt aus den beiden Annahmen $a+x=z$ und $a-x=b$, daß man überall in der letzten Gleichung $\frac{z+b}{2}$ statt a und $\frac{z-b}{2}$

statt x zu setzen hat, und man erhält durch diese Substitutionen die Gleichung

$$f(z)=f(b)+2\left[\frac{df\left(\frac{z+b}{2}\right)}{dz}\cdot\left(\frac{z-b}{2}\right)+\frac{d^3f\left(\frac{z+b}{2}\right)}{dx^3}\cdot\frac{\left(\frac{z-b}{2}\right)^3}{1.2.3}+\ldots\right]$$

und in derselben die Gleichung (11).

Ohne uns nun weiter mit den mannichfachen Formen von Reihen, welche durch Zusammensetzung der schon gefundenen Reihen abgeleitet werden können, aufzuhalten, und ohne diejenigen Reihen aufzuführen, welche entstehen, indem man bei einer Function $f(x)$, deren Werth $f(a)$ man kennt, den Berührungspunkt nicht gerade für den Werth $\frac{1}{2}(x-a)$, sondern für einen andern aliquoten Theil des Intervalles $x-a$ nimmt, bemerken wir nur noch, daß die in der niederen Analysis vorkommenden unübersehlich vielen Entwickelungen von Functionen in Potenzenreihen, welche nach Potenzen der willkürlich Veränderlichen oder eines Theiles derselben, oder auch nach Potenzen einer andern Function der willkürlich Veränderlichen fortschreiten, größtentheils nichts weiter sind als specielle Fälle der hier entwickelten allgemeinen Reihen. In der niederen Analysis werden diese Reihen immer nur speciell für eine bestimmte vorgelegte Function entwickelt, und in den meisten Fällen gelangt man zu denselben nur durch allerlei Um- und Schleichwege, welche fast für jede Function etwas Besonderes an sich haben, und deren Auffindung mehr oder weniger auf einem glücklichen Einfall beruht. Dadurch wird, in sofern man sich's zur Aufgabe macht, sich diese Ableitungen einzuprägen, das Gedächtniß außerordentlich beschwert, was für eine demonstrative Wissenschaft immer ein großer Uebelstand ist. Die Differential- und Integralrechnung, indem sie den wahren Sinn dieser Reihen aufzeigt, und sie als Ausdrücke von berührenden Functionen aufweist, gibt nicht blos den überall einzuschlagenden Weg zur Auffindung solcher Reihen an, sondern stellt auch, was

die Hauptsache ist, diese Reihen nicht mit den speciellen für eine bestimmte Function geltenden Coefficienten auf, sondern mit allgemeinen für alle Functionen geltenden, welche Coefficienten bei jeder besonderen vorgelegten Function durch ein und dasselbe operative Verfahren der Differentiation mit Leichtigkeit in bestimmte Coefficienten verwandelt werden können.

Alle bisher aufgeführten Reihen zerfallen in zwei Hauptklassen, welche am kürzesten dadurch unterschieden werden können, daß in der einen Klasse die Berührung bei demjenigen Werthe der willkürlich Veränderlichen stattfindet, für welchen man den Werth der zu entwickelnden Function weiß, in der andern Klasse aber bei irgend einem andern Werthe der willkürlich Veränderlichen. Zu der ersteren Klasse gehören außer der Reihe (1) die verschiedenen Formen der Taylor'schen Reihe und die Maclaurin'sche, und zu der zweiten sämmtliche übrige Reihen. Die Reihen der zweiten Klasse sind zugleich solche, in welchen die Coefficienten veränderlich sind mit dem Intervalle x, welches von demjenigen Werthe der willkürlich Veränderlichen, für welchen man den Functionswerth kennt, genommen ist, und sie sind nicht brauchbar zur Entwickelung einer solchen Function, in deren Differentialquotienten diese Function selbst als Bestandtheil mit vorkommt.

Es mag noch bemerkt werden, daß man sich, wenn in den Coefficienten der Potenzen einer Reihe die willkürlich Veränderliche enthalten ist, durch das äußere Ansehen einer solchen Reihe nicht muß verleiten lassen, sie ohne Weiteres der zweiten der oben aufgeführten beiden Klassen zuzuzählen. Man hat sich an das Wesentliche dabei zu halten, nämlich, ob bei demjenigen Werthe der willkürlich Veränderlichen, für welchen man den Functionswerth kennt, oder für welchen der in der Entwickelung vorkommende Functionswerth genommen ist, auch die als Coefficienten dienenden Differentialquotienten der zu entwickelnden Function genommen sind, oder nicht. Wenn man z. B. die will-

kürlich Veränderliche be Fig. 64 einer Function durch x bezeichnet, einen gewissen Werth bc derselben, der kleiner als x sein möge, durch a, so wird, wenn d der Mittelpunkt des über den Werth a hinaus genommenen Intervalles ce ist, die willkürlich Veränderliche im Punkt d den Werth $\frac{x+a}{2}$ haben, und das Intervall de, welches zu $\frac{x+a}{2}$ gesetzt den Werth x gibt, durch $\frac{x-a}{2}$ zu bezeichnen sein. Wenn man nun für den Werth $\frac{x+a}{2}$ die Berührung setzt, und $\frac{x-a}{2}$ als das vom Berührungspunkte aus genommene Intervall der willkürlich Veränderlichen betrachtet, so wird man, indem man unter diesen Annahmen die Reihe (4) anwendet, die Gleichung erhalten

$$f(x)=f\left(\frac{x+a}{2}\right)+\frac{df\left(\frac{x+a}{2}\right)}{dx}.\left(\frac{x-a}{2}\right)$$
$$+\frac{d^2f\left(\frac{x+a}{2}\right)}{dx^2}.\frac{\left(\frac{x-a}{2}\right)^2}{1.2}+\ldots$$

Diese Reihe ist offenbar die Taylor'sche, und nur scheinbar von derselben verschieden; denn für denselben Werth $\frac{x+a}{2}$ der willkürlich Veränderlichen, für welchen der Functionswerth in der Entwickelung genommen ist, sind auch die Differentialquotienten der Function f(x) zu nehmen, und indem man bei beliebig vorgeschriebenem x nur die Zahl a so wählt, daß man $f\left(\frac{x+a}{2}\right)$ kennt, kann man die Reihe auch ebenso gebrauchen wie die Taylor'sche. Eine solche blos äußerliche Formveränderung einer Reihe, welche für die Entwickelung einer Function natürlich ganz bedeutungslos ist, gewährt dennoch manchmal für andere Zwecke der Untersuchung einige Bequemlichkeiten.

§. 131.

Allg. Ausdruck der Abweichung der berührenden Functionen von der berührten.

In dem ersten Paragraphen dieses Capitels haben wir uns zwei Aufgaben gestellt, nämlich zu untersuchen, erstens ob nicht überhaupt die Coefficienten aller Potenzenreihen, welche einen Näherungswerth einer Function geben, bestimmt sind durch die verschiedengradige Stärke des Wachsens, welche diese Function in irgend einem Verflußpunkt der willkürlich Veränderlichen hat, und zweitens, in wiefern und unter welchen Bedingungen eine in einem höheren Grade gleichmäßig wachsende und in demselben Grade berührende Function einen beliebig genauen Näherungswerth einer berührten Function geben kann. Die erste Frage ist durch das Vorhergehende genügend beantwortet, und wir haben noch die zweite zu erörtern. Bisher haben wir überall nur angenommen, daß es überhaupt möglich sei, durch in höheren Graden gleichmäßig wachsende und berührende Functionen beliebig genaue Näherungswerthe solcher Functionen zu erhalten, die in allen Graden ungleichmäßig wachsen, wenigstens für Intervalle, welche sich nicht allzuweit von dem Berührungspunkte erstrecken, und haben die bequemsten und brauchbarsten Formen solcher berührenden Functionen aufgestellt. Wenn wir aber nachweisen können, daß durch solche berührende Functionen nothwendig eine unbegrenzte Annäherung an den Werth der berührten Function erhalten wird, sei es für beliebig große vom Berührungspunkte aus genommene Intervalle, oder für Intervalle, die innerhalb gewisser Grenzen liegen, so wird man diese Nachweisung erst für den Beweis der uneingeschränkten oder in Bezug auf die Intervalle eingeschränkten Geltung des Taylor'schen, des Maclaurin'schen und des Bernoulli'schen Lehrsatzes zu halten haben.

In den früheren Zeiten stützte man den Beweis des Taylor'schen Lehrsatzes auf die gewissermaßen als Grundsatz geltende Annahme, daß jede beliebige Function durch eine

Potenzenreihe der willkürlich Veränderlichen oder eines Theiles derselben mit unbegrenzter Annäherung dargestellt werden könne, oder, wie man auch hätte sagen können, daß die ins Unendliche hin ungleichmäßig wachsenden Größen durch andere in irgend welchem Grade gleichmäßig wachsende berechnet werden können. Unter dieser Annahme konnte es sich dann blos handeln um die Nachweisung, daß die Coefficienten einer solchen Potenzenreihe gegeben sind durch die successiven Differentialquotienten der zu entwickelnden Function, oder daß die den Näherungswerth angebende im höheren Grade gleichmäßig wachsende Function eben keine andere ist, als die in demselben Grade berührende Function. Diese Nachweisung kann am kürzesten gegeben werden, indem man, wie §. 128 geschehen, zeigt, daß die unbestimmt angenommenen Coefficienten der Potenzenreihe sich durch bloße Differentiation in die successiven Differentialquotienten der zu entwickelnden Function überführen lassen. Wenn wir nun nach dieser vorausgegangenen Nachweisung noch einen Beweis des Taylor'schen Lehrsatzes verlangen, so kann damit nur eine Erörterung jener ehemals als Grundsatz aufgestellten Annahme gemeint sein, welche Erörterung auf die Frage hinausläuft, ob durch in einem höheren Grade berührende und gleichmäßig wachsende Functionen immer eine unbegrenzte Annäherung an den Werth einer andern Function zu erzielen ist. Gibt es keine solche berührende Function, welche dies leistet, so gibt es überhaupt keine Potenzenreihe, welche eine unbegrenzte Annäherung gestattet, weil diese Potenzenreihe ja eben eine berührende Function sein müßte.

Lagrange hat das Verdienst, die Aufmerksamkeit der Mathematiker zuerst auf diese Untersuchungen gelenkt, und die Frage nach der Berechtigung jenes Grundsatzes gründlicher erwogen zu haben. In den Beweisen des Taylor'schen Lehrsatzes, welche in der neueren Zeit üblich geworden sind, ist die Herleitung der Form einer in höheren Graden berührenden Function mit der Nachweisung der

Bedingungen, unter welchen dieselbe eine unbegrenzte Annäherung an die berührte Function gestattet, unmittelbar verbunden. Es scheint uns aber offenbar angemessener zu sein, beides zu trennen, und zuerst nur die allgemeinen Formen der berührenden Functionen darzustellen, und dann die zweite Frage anzuschließen.

Da eine berührende Function in aller Strenge nur für Einen Werth der willkürlich Veränderlichen, nämlich für den Berührungspunkt, gleichen Werth mit der berührten Function hat, für alle andern Werthe der willkürlich Veränderlichen aber nothwendig abweicht, so wird es nöthig sein, einen wenngleich unbestimmten doch allgemein geltenden Ausdruck für die Größe dieser Abweichung aufzustellen, um zu sehen, ob aus der Form desselben sich ableiten läßt, unter welchen Bedingungen die Größe der Abweichung der Functionen sich durch Steigerung des Berührungsgrades dem Nullwerthe beliebig nahe bringen läßt. Da wir die Werthe von zwei Functionen zu vergleichen haben, welche Functionen derselben willkürlich Veränderlichen sind, so haben wir zuerst einige allgemeine Sätze über das Wachsen solcher Functionen vorauszuschicken, welche uns bei der beabsichtigten Vergleichung der Functionswerthe leiten können.

Der Fundamentalsatz, aus welchem die andern fließen, ist folgender: Wenn von zwei Functionen Einer willkürlich Veränderlichen die Eine innerhalb eines gewissen Intervalles der willkürlich Veränderlichen überall eine größere Stärke des Wachsens oder einen größeren ersten Differentialquotienten hat als die Andere, so ist die Erstere innerhalb dieses Intervalles auch mehr gewachsen als die Andere. Die Richtigkeit dieses Satzes folgt unmittelbar aus den Grundbegriffen der Differentialrechnung. Denn da nach Annahme die Differentiale (in dem früher erläuterten Sinne als isolirte Differentiale genommen) der Einen Function überall größer sein sollen als die der Andern, und die Differenzen oder wirklichen Zunahmen der Functionswerthe durch Verkleinerung der Zunahmen der willkürlich Veränderlichen den

Differentialen beliebig nahe gebracht werden können, so folgt, daß auch die sehr kleinen Differenzen der Einen Function innerhalb des gesetzten Intervalles überall größer sind, als die der Andern, und daß also auch die Summe dieser Differenzen oder die Gesammtzunahme der Einen Function größer ist als die der Andern. Wenn mithin zwei Functionen für einen gewissen Werth der willkürlich Veränderlichen gleichen Functionswerth haben, und innerhalb eines von da aus gesetzten Intervalles der willkürlich Veränderlichen hat die Eine Function überall einen größeren ersten Differentialquotienten als die Andere, so hat die erstere Function innerhalb dieses Intervalles auch überall größere Functionswerthe als die zweite.

Wenn zwei Functionen Einer willkürlich Veränderlichen für einen gewissen Werth derselben gleiche Functionswerthe und gleiche erste Differentialquotienten haben, und innerhalb eines von da aus genommenen Intervalles die Eine Function überall einen größeren zweiten Differentialquotienten hat als die Andere, so hat die erste Function innerhalb dieses Intervalles überall auch größere Functionswerthe als die Andere. Die Richtigkeit dieser Behauptung ist leicht einzusehen. Denn da nach Annahme die Eine Function innerhalb des ganzen Intervalles einen größeren zweiten Differentialquotienten hat als die Andere, so ist auch der erste Differentialquotient der ersteren Function innerhalb dieses ganzen Intervalles stärker gewachsen als der der zweiten Function; und da ferner nach Annahme im Anfangspunkte des Intervalles beide Functionen gleichen ersten Differentialquotienten haben sollten, so ist der erste Differentialquotient der ersteren Function innerhalb des ganzen Intervalles größer als der der zweiten Function, und mithin hat zu Folge des vorhergehenden Satzes die erste Function auch überall größere Werthe als die zweite.

Haben zwei Functionen Einer willkürlich Veränderlichen für einen gewissen Werth derselben den Functionswerth sowie den ersten und zweiten Differentialquotienten

gleich, und hat innerhalb eines von da aus gesetzten Intervalles die Eine Function überall einen größeren dritten Differentialquotienten als die Andere, so hat die erste Function auch innerhalb dieses ganzen Intervalles größere Werthe als die zweite. Der Beweis dieses Satzes ist derselbe wie der des vorhergehenden. Hat nämlich die eine Function innerhalb des ganzen Intervalles einen größeren dritten Differentialquotienten, so ist auch ihr zweiter Differentialquotient innerhalb dieses ganzen Intervalles stärker gewachsen als der zweite Differentialquotient der andern Function. Da aber die zweiten Differentialquotienten beider Functionen nach Annahme im Anfangspunkte des Intervalles gleich sein sollen, so ist der zweite Differentialquotient der ersten Function innerhalb des ganzen Intervalles größer als der der zweien. Und hieraus ergibt sich in Verbindung mit den übrigen Annahmen, daß die erste Function innerhalb des ganzen Intervalles größere Werthe hat als die zweite.

Es ist einleuchtend, daß auf diese Weise weiter geschlossen werden kann für alle höheren Grade der Stärke des Wachsens, und daß man ohne Weiteres zu folgendem allgemeinen Satz übergehen kann. Haben zwei Functionen Einer Veränderlichen für einen gewissen Werth der willkürlich Veränderlichen den Functionswerth und sämmtliche Differentialquotienten bis zum nten gleich, und hat innerhalb eines von diesem Werthe der willkürlich Veränderlichen aus genommenen Intervalles die eine Function überall einen größeren $(n+1)$ten Differentialquotient als die andere, so hat die erste Function auch innerhalb dieses ganzen Intervalles größere Werthe als die zweite. Diese höchst einfachen allgemeinen Sätze, welche uns die Mittel bieten, bei Functionen, die sich in irgend einem Grade berühren, aus dem Differentialquotienten des nächsthöheren Grades zu beurtheilen, welche von beiden Functionen die größeren Werthe annimmt, mußten wir unserer Untersuchung über die Abweichung der berührenden Functionen von der berührten vorausschicken.

Setzen wir eine Function, welche innerhalb eines gewissen Intervalles eine beliebig veränderliche Stärke des Wachsens hat, jedoch ohne Unterbrechung der Stetigkeit, z. B. die Ordinate der krummen Linie efg Fig. 65. Wir wollen hier unter der Unterbrechung der Stetigkeit einer Function blos dies verstehen, daß die Function für einen gewissen einzelnen endlichen Werth der willkürlich Veränderlichen einen unendlich großen Werth annimmt, in welchem Falle die Function aus unendlich großen positiven in unendlich große negative Werthe überspringen kann ohne die Zwischenstufen zu durchlaufen, und die durch imaginäre Werthe einer Function eintretende Unterbrechung der Stetigkeit unberücksichtigt lassen, weil wir die Betrachtung imaginärer Formen überhaupt von unserer ganzen Darstellung ausgeschlossen haben. Stetigsein innerhalb eines Intervalles der willkürlich Veränderlichen, und lauter endliche Functionswerthe haben innerhalb dieses Intervalles, sind uns also identische Begriffe bei einer Function.

Wenn nun eine Function, wie die Ordinate der Linie efg, innerhalb des Intervalles cd eine beliebig aber stetig veränderliche Stärke des Wachsens hat, so hat in irgend einem Punkte dieses Intervalles die Stärke des Wachsens ihren größten, und in irgend einem Punkte ihren kleinsten Werth. Denkt man sich die größte Stärke des Wachsens für das ganze Intervall cd dauernd, wie dies in den Ordinaten der geraden Linie fk sein möge, so wird dem obigen Satze zu Folge mit der Zunahme cd eine größere Zunahme der Function verbunden sein, als diejenige ist, welche durch die veränderliche Stärke des Wachsens erreicht wird. Und denkt man die kleinste innerhalb des Intervalles cd vorkommende Stärke des Wachsens über das ganze Intervall herrschend, wie in den Ordinaten der Linie fh, so wird mit der Zunahme cd eine kleinere Zunahme ih der Function verbunden sein als die Zunahme ig ist, welche durch die beliebig veränderliche Stärke des Wachsens erzeugt wird. In sofern nun diese veränderliche Stärke des Wachsens

aus ihrem größten in ihren kleinsten Werth stetig übergeht, so werden alle zwischen dem größten und kleinsten Werthe der Stärke des Wachsens denkbaren Zwischenstufen in einzelnen Punkten des Intervalles cd irgendwo vorhanden sein. Es muß also auch innerhalb des Intervalles cd einen Werth der Abscisse geben, in welchem die Stärke des Wachsens so groß ist, daß, wenn dieselbe für das ganze Intervall cd dauernd wäre, die durch diese constante Stärke des Wachsens erreichte Zunahme zusammenfiele mit der durch die veränderliche Stärke des Wachsens erreichten. In Bezug auf die Figur ausgesprochen heißt dieser Satz, es muß, wenn der erste Differentialquotient der Ordinate der Curve sich stetig ändert, innerhalb des Intervalles cd wenn nicht mehrere doch wenigstens Einen Curvenpunkt geben, dessen Tangente dieselbe Richtung hat als die gerade Linie fg. Wir wollen diejenige Stärke des Wachsens, welche, wenn sie innerhalb eines Intervalles dauernd bliebe, eine ebenso große Zunahme hervorbringen würde, als die veränderliche Stärke des Wachsens in diesem Intervalle erzeugt, die durchschnittliche Stärke des Wachsens dieses Intervalles nennen.

Ertheilt man nun der willkürlich Veränderlichen einer Function den Werth a, und setzt von diesem Werthe aus ein Intervall x, so muß es, wenn ϑ eine Zahl vorstellt, die kleiner als **1** ist, einen Werth $a+\vartheta x$ der willkürlich Veränderlichen geben, für welchen die momentane Stärke des Wachsens der Function die durchschnittliche des Intervalles x ist. Multiplicirt man demnach den Werth, welchen der erste Differentialquotient einer Function ($f(a+x)$ für den Werth $a+\vartheta x$ der willkürlich Veränderlichen annimmt, also den Werth $\frac{df(a+\vartheta x)}{dx}$, mit der Zahl x, so wird dies Product die Zunahme angeben, welche die Function $f(a+x)$ dadurch erhalten hat, daß ihre willkürlich Veränderliche von dem Werthe a bis zum Werthe $a+x$ gewachsen ist. Es ist klar, daß man zu dieser Zunahme $\frac{df(a+\vartheta x)}{dx}.x$ der

Function nur noch den Werth f(a) zu addiren braucht, um den Werth von f(a+x) zu haben. Wir erhalten also die Gleichung

$$f(a+x)=fa+\frac{df(a+\vartheta x)}{dx}.x$$

welche Gleichung zwar für die Berechnung von f(a+x) gar nichts hilft, weil man nicht weiß, wie groß die Zahl ϑ zu nehmen ist, welche aber dadurch für unsern Zweck brauchbar wird, daß die Function f(a+x) durch einen, wenngleich nicht näher bestimmbaren Werth des Differentialquotienten dieser Function ausgedrückt erscheint.

Nehmen wir ferner an, die Function f(a+x) habe innerhalb des Intervalles x eine beliebig veränderliche Beschleunigung des Wachsens, jedoch ohne Unterbrechung der Stetigkeit. Diese Beschleunigung des Wachsens oder der zweite Differentialquotient der Function wird einen größten und einen kleinsten Werth haben. Denkt man sich nun eine Function von x, welche die Function f(a+x) im Anfangspunkte von x im ersten Grade berührt, und in welcher die größte innerhalb des Intervalles x vorhandene Beschleunigung des Wachsens der Function f(a+x) dauernd ist, so wird den obigen allgemeinen Sätzen zu Folge diese Function von x in dem ganzen Intervalle x größere Werthe haben als die Function f(a+x). Und eine die Function f(a+x) an demselben Punkte im ersten Grade berührende Function von x, in welcher die kleinste innerhalb des Intervalles x vorhandene Beschleunigung des Wachsens der Function f(a+x) dauernd ist, wird überall innerhalb des Intervalles x kleinere Werthe haben als die Function f(a+x). In sofern nun die Beschleunigung des Wachsens der Function f(a+x) aus ihrem größten Werthe in den kleinsten stetig übergeht, so werden alle denkbaren Zwischenstufen der größten und kleinsten Beschleunigung des Wachsens sich in den einzelnen Punkten des Intervalles x finden; und es muß in dem Intervalle x einen Punkt geben, bei welchem die Beschleunigung des Wachsens der Function f(a+x) so groß ist, daß durch dieselbe, wenn sie bei einer die Function

$f(a+x)$ im Anfangspunkte von x im ersten Grade berührenden Function in dem ganzen Intervalle x dauernd wäre, eine gerade so große Zunahme im Endpunkte von x erzeugt wird, als durch die veränderliche Beschleunigung des Wachsens der Function $f(a+x)$ hervorgebracht wird. Man kann auch hier diejenige Beschleunigung des Wachsens, welche, von der im Anfangspunkte eines Intervalles x vorhandenen Stärke des Wachsens ausgehend und in dem ganzen Intervalle dauernd, dieselbe Zunahme erzeugt, im Endpunkte von x als eine veränderliche Beschleunigung des Wachsens, die durchschnittliche des Intervalles x nennen. Stellt ϑ wie vorher eine Zahl vor, welche kleiner als 1 ist, so wird es einen Werth $a+\vartheta x$ der willkürlich Veränderlichen geben, bei welchem der zweite Differentialquotient der Function $f(a+x)$ die für das Intervall x durchschnittliche Beschleunigung des Wachsens der Function $f(a+x)$ angibt, und es kann demnach diese durchschnittliche Beschleunigung des Wachsens durch $\frac{d^2f(a+\vartheta x)}{dx^2}$ ausgedrückt werden. So wie wir nun vorher die Function $f(a+x)$ durch eine im ersten Grade gleichmäßig wachsende Function von x dargestellt haben, welche für den Nullwerth von x den Werth $f(a)$ hat, und deren Stärke des Wachsens die für das Intervall x durchschnittliche der Function $f(a+x)$ ist, so können wir auch die Function $f(a+x)$ durch eine im zweiten Grade gleichmäßig wachsende Function von x darstellen, welche für den Nullwerth von x den ersten Differentialquotienten und den Functionswerth mit $f(a+x)$ gemeinschaftlich hat, und deren Beschleunigung des Wachsens die für das Intervall x durchschnittliche der Function $f(a+x)$ ist. Die gesuchte im zweiten Grade gleichmäßig wachsende Function von x hat im Allgemeinen die Form $A+Bx+Cx^2$. Da wie bekannt $2C$ die constante Beschleunigung des Wachsens dieser Function ausdrückt, so haben wir $\frac{d^2f(a+\vartheta x)}{dx^2}$ statt $2C$, oder $\frac{1}{2}\cdot\frac{d^2f(a+\vartheta x)}{dx}$.

statt C zu setzen. Für $x=0$ nimmt die Function $A+Bx+Cx^2$ den Werth A, und ihr erster Differentialquotient den Werth B an; und da diese Werthe gleich sein sollen den Werthen, welche die Function $f(a+x)$ und ihr erster Differentialquotient für $x=0$ annehmen, also gleich den Werthen $f(a)$ und $\frac{df(a)}{dx}$, so ist die gesuchte im zweiten Grade gleichmäßig wachsende Function von x durch die Form $f(a)+\frac{df(a)}{dx}+\frac{d^2f(a+\vartheta x)}{dx^2}.\frac{x^2}{1.2}$ gegeben, und wir erhalten die Gleichung

$$f(a+x)=f(a)+\frac{df(a)}{dx}.\frac{x}{1}+\frac{d^2f(a+\vartheta x)}{dx^2}.\frac{x^2}{1.2}.$$

Veranschaulicht durch die Ordinaten der krummen Linie efg Fig. 65, in welcher das Abscissenstück bc den Werth a und cd den Werth x haben möge, kann dieser Satz so ausgesprochen werden: Wenn man eine in Bezug auf ihre Ordinaten im zweiten Grade gleichmäßig wachsende Parabel durch die Punkte f und g legt, welche zugleich die Curve efg im Punkte f im ersten Grade berührt, so gibt es innerhalb des Intervalles x einen Punkt, oder einen Werth $a+\vartheta x$ der Abscisse, für welchen der zweite Differentialquotient der Ordinaten der Curve efg identisch ist mit dem constanten zweiten Differentialquotienten der Ordinaten der Parabel. Daß man eine in Bezug auf ihre Ordinaten im zweiten Grade gleichmäßig wachsende Parabel durch die Punkte f und g so legen könne, daß sie die Curve efg im Punkte f im ersten Grade berührt, versteht sich von selbst, weil die Gleichung einer solchen Parabel drei unbestimmte Constante enthält, welche den drei vorgeschriebenen Bedingungen angepaßt werden können. Hier ist nur bewiesen, daß der constante zweite Differentialquotient der Ordinaten der Parabel nothwendig vorkommt unter den Werthen, welche der zweite Differentialquotient der Curve efg innerhalb des Intervalles x annimmt.

Nehmen wir noch an, daß die Function $f(a+x)$ in-

nerhalb des Intervalles x eine beliebig veränderliche Stärke des Wachsens im dritten Grade habe, so gibt es einen größten und kleinsten Werth dieser Stärke des Wachsens. Eine die Function $f(a+x)$ im Anfangspunkte von x im zweiten Grade berührende Function von x wird, wenn ihr dritter Differentialquotient constant und gleich dem größten innerhalb des Intervalles x vorkommenden Werthe des dritten Differentialquotienten der Function $f(a+x)$ ist, überall innerhalb des Intervalles x größere Werthe haben als die Function $f(a+x)$, und wenn ihr dritter constanter Differentialquotient gleich ist dem kleinsten Werthe des dritten Differentialquotienten von $f(a+x)$, so wird sie überall innerhalb des Intervalles x kleinere Werthe haben als die Function $f(a+x)$. Wenn nun der dritte Differentialquotient von $f(a+x)$ innerhalb des Intervalles x aus seinem größten in seinen kleinsten Werth stetig übergeht, so ist in einem Punkte des Intervalles x dieser dritte Differentialquotient so groß, daß er als constanter dritter Differentialquotient jener im zweiten Grade berührenden Function genommen innerhalb des Intervalles x eine gerade so große Zunahme hervorbringt, als die Function $f(a+x)$ innerhalb dieses Intervalles annimmt. Nennen wir diesen einzelnen Werth des dritten Differentialquotienten der Function $f(a+x)$ den durchschnittlichen in dem oben erläuterten Sinne, so gibt es einen Werth $a+\vartheta x$ der willkürlich Veränderlichen, für welchen der dritte Differentialquotient von $f(a+x)$ seinen für das Intervall x durchschnittlichen Werth hat, und eine die Function $f(a+x)$ im Anfangspunkte von x im zweiten Grade berührende Function von x, deren dritter constanter Differentialquotient gleich $\frac{d^3 f(a+\vartheta x)}{dx^3}$ ist, wird mit $f(a+x)$ gleichen Werth haben. Stellen wir eine solche im dritten Grade gleichmäßig wachsende Function von x zunächst unter der unbestimmten Form $A+Bx+Cx^2+Dx^3$ vor, so wird, für $x=o$, der Werth dieser Function $=A$, der erste Differentialquotient $=B$, der

zweite $=1.2C$ und der dritte $=1.2.3D$; und da diese Werthe der Function und ihrer drei ersten Differentialquotienten der Reihe nach gleich $f(a)$, $\frac{df(a)}{dx}$, $\frac{d^2f(a)}{dx^2}$ und $\frac{d^3f(a+\vartheta x)}{dx^3}$ sein sollen, so werden wir, indem wir $f(a)$ statt A, $\frac{df(a)}{dx}$ statt B, $\frac{1}{1.2}\frac{d^2f(a)}{dx^2}$ statt C und $\frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{d^3f(a+\vartheta x)}{dx^3}$ statt D setzen, die Gleichung erhalten

$$f(a+x)=f(a)+\frac{df(a)}{dx}\cdot\frac{x}{1}+\frac{d^2f(a)}{dx^2}\cdot\frac{x^2}{1.2}$$
$$+\frac{d^3f(a+\vartheta x)}{dx^3}\cdot\frac{x^3}{1.2.3}.$$

Man wird ohne Weiteres bemerken, daß das Raisonnement, durch welches die vorhergehenden verschiedenen Ausdrücke für $f(a+x)$ gefunden worden sind, sich unverändert auf alle folgenden Grade der Stärke des Wachsens übertragen läßt, und daß man durch dasselbe zu folgendem Resultate gelangen wird: Wenn eine Function von x, welche die Function $f(a+x)$ im Anfangspunkte von x im nten Grade berührt, eine solche constante Stärke des Wachsens im $(n+1)$ten Grade hat, daß ihre dem Intervalle x zugehörige Zunahme gleich ist der demselben Intervalle zugehörigen Zunahme der Function $f(a+x)$, in welchem Falle diese constante Stärke des Wachsens im $(n+1)$ten Grade die durchschnittliche der Function $f(a+x)$ für das Intervall x heißen mag, so gibt es immer einen Werth $a+\vartheta x$ der willkürlich Veränderlichen, für welchen die momentane Stärke des Wachsens im $(n+1)$ten Grade der Function $f(a+x)$ gleich jener durchschnittlichen ist, sobald die Differentialquotienten von $f(a+x)$ bis zum $(n+1)$ten nur endliche Werthe haben innerhalb des Intervalles x. Da die im nten Grade berührende und im $(n+1)$ten Grade gleichmäßig wachsende Function von x offenbar $(n+2)$ vorgeschriebenen Bedingungen genügen soll, indem sie in dem Anfangspunkte von x mit der Function $f(a+x)$ den Functionswerth und die n ersten Differentialquotienten gemeinschaftlich haben soll, und im Endpunkte

von x mit f(a + x) zusammenfallen soll, so sieht man, daß sie nicht blos allemal diesen Bedingungen entsprechend gebildet werden kann, sondern daß sie auch durch diese Bedingungen völlig bestimmt ist, weil eine im (n + 1)ten Grade gleichmäßig wachsende Function immer (n + 2) unbestimmte Constante enthält. Wenn wir die im nten Grade berührende und im (n + 1)ten Grade gleichmäßig wachsende Function von x, welche für den Werth x der willkürlich Veränderlichen mit f(a + x) zusammenfällt, durch die Potenzenreihe $A + Bx + Cx^2$ u. s. w. bis zur (n + 1)ten Potenz von x vorstellen, und die Constanten A, B, C u. s. w. so bestimmen, daß sie den vorgeschriebenen Bedingungen entsprechen, so werden dieselben der Reihe nach die Werthe

$$f(a),\ \frac{df(a)}{dx},\ \frac{1}{1.2}\cdot\frac{d^2f(a)}{dx^2},\ \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{d^3f(a)}{xd^3},\ldots$$

$$\ldots\frac{1}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{d^nf(a)}{dx^n} \text{ und } \frac{1}{1.2.3\ldots n(n+1)}\cdot\frac{d^{n+1}f(a+\vartheta x)}{dx^{n+1}}$$

annehmen, und wir erhalten die Gleichung

$$f(a+x)=f(a)+\frac{df(a)}{dx}\cdot\frac{x}{1}+\frac{d^2f(a)}{dx^2}\cdot\frac{x^2}{1.2}\ldots\ldots$$

$$+\frac{d^nf(a)}{dx^n}\cdot\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}+\frac{d^{n+1}f(a+\vartheta x)}{dx^{n+1}}\cdot\frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots n(n+1)}.\quad(12)$$

Die Zahl ϑ wird im Allgemeinen für jeden Grad der Stärke des Wachsens einen verschiedenen Werth haben, und man weiß von ihr nichts weiter, als daß sie kleiner als 1 ist. Obgleich nun demnach die Reihe (12) zur Berechnung des Werthes von f(a + x) nicht dienen kann, so ist sie doch von Wichtigkeit, weil in derselben der Werth von f(a+x) durch eine im nten Grade berührende und im (n + 1)ten Grade gleichmäßig wachsende Function ausgedrückt erscheint, und in diesem Ausdrucke nur die Differentialquotienten von f(a + x) vorkommen, und diese Reihe uns mithin die Mittel an die Hand geben kann, zu erkennen, auf welche Weise die Bedingungen, unter denen eine in einem höheren Grade berührende und in demselben Grade gleichmäßig wachsende Function eine Annäherung an den Werth der berührten

Function gestattet, an die Beschaffenheit der Differentialquotienten der berührten Function geknüpft sind.

Die Reihe (12) stellt, wenn man das letzte Glied wegläßt, eine im nten Grade gleichmäßig wachsende Function von x vor, welche die Function $f(a+x)$ für den Werth a der willkürlich Veränderlichen im nten Grade berührt, d. h. sie ist die Taylor'sche Reihe. Da zu dieser Function von x noch der Ausdruck $\frac{d^{n+1}f(a+\vartheta x)}{dx^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots n(n+1)}$ hinzugefügt werden muß, um den Werth von $f(a+x)$ hervorzubringen, so heißt dieser Ausdruck der Rest der Taylor'schen Reihe, und er gibt allgemein an, um wie viel die im nten Grade berührende und in demselben Grade gleichmäßig wachsende Function von der berührten Function abweicht. Dieser Restausdruck ist zuerst von Lagrange abgeleitet worden, auf einem von dem vorhergehenden abweichenden ziemlich künstlichen Wege, so daß in dem Ausdruck fast eine geheimnißvolle und wunderbare Eigenschaft der Functionen ausgesprochen scheinen möchte. Wie wir aber gesehen haben, wird durch diesen Restausdruck etwas sehr Einfaches und fast Triviales ausgesprochen.

Die Abweichung der in irgend einem Grade berührenden und in demselben Grade gleichmäßig wachsenden Function von der berührten kann vermittelst der Reihe (12) auch ohne Zuhülfenahme des nächsthöheren Differentialquotienten ausgedrückt werden. Denn die eine Function $f(a+x)$ z. B. im dritten Grade berührende und in demselben Grade gleichmäßig wachsende Function von x ist gegeben durch

$$f(a) + \frac{df(a)}{dx} \cdot \frac{x}{1} + \frac{d^2f(a)}{dx^2} \cdot \frac{x^2}{1.2} + \frac{d^3f(a)}{dx^3} \cdot \frac{x^3}{1.2.3}$$

und da zugleich

$$f(a+x) = f(a) + \frac{df(a)}{dx} \cdot \frac{x}{1} + \frac{d^2f(a)}{dx^2} \cdot \frac{x^2}{1.2} + \frac{d^3f(a+\vartheta x)}{dx^3} \cdot \frac{x^3}{1.2.3}$$

so sieht man, nach Abziehung der im dritten Grade berührenden Function von dem Werthe von $f(a+x)$, daß die berührende um den Werth

$$\left(\frac{d^3 f(a+\vartheta x)}{dx^3} - \frac{d^3 f(a)}{dx^3}\right)\frac{x^3}{1.2.3}$$

von $f(a+x)$ abweicht. Allgemein wird eine Function von x, welche im $n$ten Grade gleichmäßig wachsend die Function $f(a+x)$ für den Werth a der willkürlich Veränderlichen im $n$ten Grade berührt, von $f(a+x)$ abweichen um den Werth des Ausdrucks

$$\left(\frac{d^n f(a+\vartheta x)}{dx^n} - \frac{d^n f(a)}{dx^n}\right)\frac{x^n}{1.2.3\ldots.n}.$$

Sobald von einer Function $f(a+x)$ sich nachweisen läßt, daß für jeden beliebigen Werth der Zahlen a und x entweder der Ausdruck

$$\frac{d^{n+1} f(a+\vartheta x)}{dx^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots.n(n+1)}$$

oder der Ausdruck

$$\left(\frac{d^n f(a+\vartheta x)}{dx^n} - \frac{d^n f(a)}{dx^n}\right)\frac{x^n}{1.2.3\ldots.n}$$

durch gehörige Vergrößerung der Zahl n sich dem Nullwerth beliebig nahe bringen läßt, so hat der Taylor'sche Lehrsatz für diese Function seine unbedingte Gültigkeit.

§. 132.

Das Wesen der Gradverschiedenheit bei den Berührungen.

Ehe wir die Untersuchung der Bedingungen der uneingeschränkten Gültigkeit des Taylor'schen Lehrsatzes vornehmen, wollen wir die für die Abweichung der sich berührenden Functionen gefundenen Ausdrücke benutzen, um die Bedeutung der wirklichen Gradverschiedenheit, welche bei den verschiedenen Graden der Berührung stattfindet, nachzuweisen. Wir haben die Definition der verschiedenen Grade der Berührung nur aus dem Zusammentreffen der Differentialquotienten entnommen, haben aber nicht angegeben, ob und in wiefern in Betreff der Art und Weise der Berüh-

rung wesentliche Unterschiede stattfinden bei den verschiedenen Graden der Berührung. Es ist vielmehr im §. 113, wo die im zweiten Grade berührenden Functionen zuerst in Betracht gezogen wurden, gesagt worden, daß später im umfassenderen Zusammenhange der höheren Differentialquotienten der Nachweis geliefert werden soll, daß man, sobald nur die Differentialquotienten der berührten Function endliche Werthe haben im Berührungspunkte, durch Annäherung an den Berührungspunkt immer zu Punkten gelangen kann, in welchen eine in einem höheren Grade berührende Function sich beliebig vielmal inniger an den Werth der berührten Function anschließt, als die in dem nächstniedrigeren Grade berührende Function. Diesen Nachweis wollen wir hier geben, und zwar zuerst für solche in einem höheren Grade berührende Functionen, welche zugleich in demselben Grade gleichmäßig wachsend sind.

Denkt man zwei Functionen von x, von denen Eine die Function $f(a+x)$ für den Werth a der willkürlich Veränderlichen im ersten, und die andere im zweiten Grade berührt, und die zugleich in den entsprechenden Graden gleichmäßig wachsend sind, so hat die erstere eine Abweichung von dem Werthe $f(a+x)$ gleich $\left(\frac{df(a+\vartheta x)}{dx}-\frac{df(a)}{dx}\right)x$ und die zweite eine Abweichung gleich $\left(\frac{d^2f(a+\vartheta x)}{dx^2}-\frac{d^2f(a)}{dx^2}\right)\frac{x^2}{1.2}$. In sofern der erste und zweite Differentialquotient von $f(a+x)$ innerhalb des Intervalles x endliche Werthe haben (unter welcher Voraussetzung diese Ausdrücke für die Abweichung ja überhaupt nur Gültigkeit haben), und also die Coefficienten von x und $\frac{x^2}{1.2}$ endliche Zahlen vorstellen, kann offenbar das vom Berührungspunkte aus gesetzte Intervall x immer so klein genommen werden, daß der Werth des Ausdrucks $\left(\frac{d^2f(a+\vartheta x)}{dx^2}-\frac{d^2f(a)}{dx^2}\right)\frac{x^2}{1.2}$ beliebig vielmal kleiner ist als

der Werth des Ausdrucks $\left(\frac{df(a+\vartheta x)}{dx} - \frac{df(a)}{dx}\right)x$. Obgleich beide Ausdrücke mit Verkleinerung des Intervalles x sich dem Nullwerthe nähern, so nähern sie sich doch diesem Werthe ungleich stark, und es wird durch fortgesetzte Verkleinerung von x die Anschließung der im zweiten Grade berührenden Function an den Werth von $f(a+x)$ über jede vorgeschriebene Grenze hinaus inniger erhalten werden als die Anschließung der im ersten Grade berührenden Function. Und da bei fortgesetzter Verkleinerung des Intervalles x vor dem Uebergang in den Berührungspunkt die Abweichungen der beiden berührenden Functionen von dem Werthe der Function $f(a+x)$ relativ zu einander alle denkbaren Zahlenverhältnisse durchlaufen, und die Stärke der Anschließung beider Functionen sich dem Unvergleichbaren nähert, so hat man ein Recht, diese Arten der Berührung als wesentlich verschiedene zu betrachten. Denn wenn man angeben wollte, um wie vielmal inniger in der unmittelbarsten Nähe des Berührungspunktes die Eine Function sich anschließt als die Andere, so könnte man nicht anders sagen als unendlich vielmal.

Da ferner Functionen von x, von denen die Eine die Function $f(a+x)$ im zweiten und die Andere im dritten Grade berührt, und die beide in den entsprechenden Graden gleichmäßig wachsend sind, Abweichungen haben von dem Werthe der Function $f(a+x)$, welche gleich $\left(\frac{d^2f(a+\vartheta x)}{dx^2} - \frac{d^2f(a)}{dx^2}\right).\frac{x^2}{1.2}$ und gleich $\left(\frac{d^3f(a+\vartheta x)}{dx^3} - \frac{d^3f(a)}{dx^3}\right).\frac{x^3}{1.2.3}$ zu setzen sind, so sieht man, daß mit fortgesetzter Verkleinerung des Intervalles x die Abweichung der im dritten Grade berührenden Function beliebig vielmal kleiner gemacht werden kann als die Abweichung der im zweiten Grade berührenden Function, daß also mit Annäherung an den Berührungspunkt die verschiedene Innigkeit der Anschließung beider berührenden Functionen sich

wieder dem Unvergleichbaren nähert. Dasselbe folgt auf dieselbe Weise für alle höheren Grade der Berührung. Es verhält sich mit dieser verschiedenen Innigkeit der Berührung bei fortgesetzter Annäherung an den Berührungspunkt gerade wie mit den Differentialen der verschiedenen Grade bei ihrer gemeinschaftlichen Annäherung an den Nullwerth. Sobald die Differentialquotienten der berührten Function im Berührungspunkte endliche Werthe haben, so gibt es immer ein wenn auch noch so kleines Intervall, in welchem diese Differentialquotienten ebenfalls endliche Werthe haben, weil eine Function nicht plötzlich aus einem endlichen Werthe in den unendlich großen übergehen kann. Folglich gilt der über die Berührungsgrade aufgestellte allgemeine Satz, daß die Abweichung der im nten Grade berührenden Function durch Verkleinerung des vom Berührungspunkte aus genommenen Intervalles beliebig vielmal kleiner gemacht werden kann als die Abweichung der im (n—1)ten Grade berührenden Function, unbedingt, sobald nur im Berührungspunkte selbst die Differentialquotienten der berührten Function bis zum nten endliche Werthe haben.

Auch in dem Falle, in welchem die berührenden Functionen nicht gleichmäßig wachsend sind in den Graden, in welchen die Berührung stattfindet, gelten noch dieselben Sätze in Betreff der Gradabstufung der innigen Anschließung, und die Abweichung einer etwa im zweiten Grade berührenden Function kann beliebig vielmal kleiner erhalten werden als die Abweichung einer im ersten Grade berührenden. Es möge z. B., um dies durch geometrische Beispiele zu erläutern, durch einen Punkt einer Curve eine Tangente und zugleich ein Kreis gelegt sein, welcher die Curve im zweiten Grade berührt. Die beiden im zweiten Grade sich berührenden krummen Linien haben für den Berührungspunkt eine gemeinschaftliche sie im zweiten Grade berührende und in Bezug auf ihre Ordinaten im zweiten Grade gleichmäßig wachsende Parabel. Die Abweichung der Ordinate der berührenden Parabel von der Ordinate

der Kreislinie sowol als von der Ordinate der andern Curve kann den obigen Sätzen zu Folge durch Annäherung an den Berührungspunkt beliebig vielmal kleiner erhalten werden, als die Abweichung der Ordinate der Tangente von den Ordinaten der Kreislinie und der andern Curve. Folglich wird auch die Abweichung, welche die Ordinaten der Kreislinie und der andern Curve untereinander haben, beliebig vielmal kleiner gemacht werden können als die Abweichungen der Ordinaten dieser beiden Curven von der Ordinate ihrer gemeinschaftlichen Tangente. Mithin wird auch die eine Curve im zweiten Grade berührende Kreislinie, obgleich in Bezug auf ihre Ordinaten nicht gleichmäßig wachsend im zweiten Grade, sich in der Nähe des Berührungspunktes beliebig vielmal inniger an die Curve anschließen als die diese Curve im ersten Grade berührende Tangente. Es macht offenbar keinen Unterschied, wenn die im ersten Grade berührende Linie keine gerade, sondern eine beliebige Curve ist, weil alsdann beide Curven eine gemeinschaftliche Tangente haben, und man dieselben Schlüsse auf die Abweichungen der Ordinaten beider Curven von der Ordinate der Tangente anwenden kann. Ebenso ist einleuchtend, daß man die im Vorhergehenden gebrauchte Schlußweise auch auf die höheren Grade der Berührung ausdehnen kann.

§. 133.

Bedingungen der unbegrenzten Annäherung der berührenden Functionen an die berührte.

Da man bei der Frage nach der durch berührende Functionen zu erreichenden Annäherung an den Werth der berührten Function eigentlich wissen will, ob die ins Endlose fortgesetzt gedachte Potenzenreihe dem Werthe der berührten Function gleichzusetzen ist oder nicht, so haben wir noch die Eigenthümlichkeiten ins Auge zu fassen, welche die Differentialquotienten zeigen, wenn ihre Rangzahl ins Unendliche gesteigert wird. Hierbei zeigt sich unter den Functionen der Unterschied, daß ihre Differentialquotienten mit

steigender Rangzahl entweder ins Maßlose wachsen oder nicht. Von dem maßlosen Wachsen der Differentialquotienten können wir uns durch ganz einfache und naheliegende Beispiele überzeugen. Die Differentialquotienten der Function a^x, welche der Reihe nach sind $la.a^x$, $(la)^2 a^x$, $(la)^3 a^x$ u. s. w. wachsen offenbar für einen Werth von a, welcher größer ist als die Basis des natürlichen Logarithmensystems, und für jeden Werth des x mit steigender Rangzahl unbegrenzt, und ein unendlich hoher Differentialquotient wäre auch unendlich groß zu denken. Ebenso verhält es sich mit den Differentialquotienten irgend einer Wurzel aus x. Die Differentialquotienten von $x^{\frac{1}{2}}$ z. B. sind der Reihe nach, $\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$, $-\frac{1}{2.2x^{\frac{3}{2}}}$, $+\frac{1.3}{2.2.2.x^{\frac{5}{2}}}$, $-\frac{1.3.5}{2.2.2.2.x^{\frac{7}{2}}}$ u. s. w. Man sieht, daß bei Bildung eines nächstfolgenden Differentialquotienten dieser Function aus dem vorhergehenden im Nenner immer der Factor $2.x$ hinzutritt, und im Zähler die nächsthöhere ungerade Zahl als Factor zugesetzt wird. Sobald der im Zähler hinzutretende Factor größer ist als $2x$, welcher Fall für jeden Werth des x bei irgend einem höheren Differentialquotienten nothwendig eintreten muß, so werden von da an die Differentialquotienten der Function $x^{\frac{1}{2}}$ unbegrenzt wachsen. Dasselbe findet bei unzähligen andern Functionen statt.

Obgleich unendlichhohe Differentialquotienten als solche niemals Gegenstand der Untersuchung sein können, so ist es doch gestattet, die Eigenschaft der Differentialquotienten, bei steigender Rangzahl ins Maßlose zu wachsen, kurz dadurch zu bezeichnen, daß man sagt, der unendlich hohe Differentialquotient ist unendlich groß. In diesem Sinne ist eine solche Ausdrucksweise, wenn sie in dem Folgenden gebraucht wird, immer zu nehmen. Dadurch, daß die Dif-

ferentialquotienten von einer unendlich hoch gedachten Rangzahl unendlich große Werthe annehmen, ist natürlich keine Unterbrechung der Stetigkeit derselben gesetzt, so wenig als dadurch, daß ein Differentialquotient einer Function für unendlich große Werthe der willkürlich Veränderlichen unendlich groß wird. Als Unterbrechung der Stetigkeit der Differentialquotienten ist nur dies zu betrachten, daß ein Differentialquotient von endlicher angebbarer Rangzahl für einzelne bestimmte Verflußpunkte der willkürlich Veränderlichen unendlich groß wird.

Betrachten wir nun die Taylor'sche Reihe mit dem Lagrange'schen Restausdruck

$$f(a+x) = f(a) + \frac{df(a)}{dx} \cdot \frac{x}{1} + \frac{d^2f(a)}{dx^2} \cdot \frac{x^2}{1.2} \ldots$$

$$+ \frac{d^nf(a)}{dx^n} \cdot \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \frac{d^{n+1}f(a+\vartheta x)}{dx^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots n(n+1)}$$

so wird, wie bereits oben bemerkt, eine im $n$ten Grade gleichmäßig wachsende und die Function $f(a+x)$ im $n$ten Grade berührende Function von x sich dem wahren Werthe von $f(a+x)$ mit steigendem Berührungsgrade unbegrenzt annähern, sobald der Ausdruck

$$\frac{d^{n+1}f(a+\vartheta x)}{dx^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots n(n+1)}$$

mit Vergrößerung der Zahl n sich dem Nullwerthe unbegrenzt nähert. Wir betrachten die beiden Factoren dieses Ausdrucks einzeln. Daß der Eine Factor $\frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots n(n+1)}$ bei beliebig großem Werthe von x mit wachsendem n dem Nullwerthe beliebig nahe gebracht werden kann, davon kann man sich leicht auf folgende Art überzeugen. Wird ein ächter Bruch auf immer höhere Potenzen erhoben, so nähert er sich dem Nullwerthe unbegrenzt. Sind die Potenzen dieses ächten Bruches noch mit einer beliebig großen constanten Zahl multiplicirt, so nähert sich dieses Product dem Nullwerthe ebenfalls unbegrenzt. Wenn nun dadurch, daß zu einer beliebig großen Zahl immer derselbe ächte Bruch

als Factor zutritt, das Product dem Nullwerthe beliebig nahe gebracht werden kann, so wird dies um so mehr stattfinden, wenn zu einer beliebigen Zahl immer kleiner werdende ächte Brüche als Factoren zugesetzt werden. Betrachten wir nun den Ausdruck $\frac{x^{n+1}}{1.2.3...n(n+1)}$, so sehen wir, wenn die Zahl n immer um die Einheit wachsend gedacht wird, zu dem Zähler fortwährend den Factor x hinzutreten, und zum Nenner einen Factor, der um 1 größer ist als der vorher vorhandene höchste Factor im Nenner. Mag x nun auch beliebig groß sein, so muß zuletzt doch der Fall eintreten, daß der im Nenner hinzutretende Factor größer ist als x. Von nun an wird bei weiter wachsendem n der Werth des Ausdrucks $\frac{x^{n+1}}{1.2.3...n(n+1)}$ mit immer kleiner werdenden ächten Brüchen multiplicirt, und folglich muß er sich mit wachsendem n dem Nullwerthe unbegrenzt annähern.

Wenn nun die Function $f(a+x)$ eine solche ist, deren Differentialquotienten mit steigender Rangzahl nicht ins Maßlose wachsen, sondern innerhalb gewisser Grenzen bleiben, so wird der Ausdruck $\frac{d^{n+1}f(a+\vartheta x)}{dx^{n+1}}$ auch bei endlos wachsendem n einen endlichen Werth behalten. Mithin wird unter diesen Umständen auch der Ausdruck

$$\frac{d^{n+1}f(a+\vartheta x)}{dx^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{1.2.3...n(n+1)}$$

sich mit steigendem Berührungsgrade nothwendig zuletzt dem Nullwerthe unbegrenzt nähern, wie groß auch das vom Berührungspunkte aus genommene Intervall x gesetzt wird, und die ins Endlose fortgesetzte Taylor'sche Reihe muß als ein adäquater Ausdruck der Function $f(a+x)$ angesehen werden.

Nehmen wir z. B. die Functionen $\sin x$, und $\cos x$, so gehören dieselben zu denen, deren Differentialquotienten bei beliebig steigender Rangzahl nicht maßlos wachsen, sich viel-

mehr innerhalb der engen Grenzen von $+1$ und -1 halten. Die Differentialquotienten von e^x sind sämmtlich gleich e^x, und folglich ihrer Größe nach von der Rangzahl gar nicht abhängig. Bei diesen Functionen hat also die Taylor'sche Reihe ihre unbedingte Gültigkeit für alle beliebig großen vom Berührungspunkte aus gesetzte Intervalle der willkürlich Veränderlichen. Es mag jedoch bemerkt werden, daß man deswegen nicht schließen darf, es werde für solche Functionen bei jedem beliebigen Intervalle der willkürlich Veränderlichen jede folgende in einem höheren Grade berührende Function einen genaueren Näherungswerth geben, als die vorhergehende. Es kann ja bei einem verhältnißmäßig großen Intervalle x der Factor $\frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots n(n+1)}$ des Restausdruckes bis zu einem gewissen Werthe von n bedeutend wachsen, und folglich der Restausdruck bis zu einem gewissen Berührungsgrade ebenfalls wachsen. Unser obiger Satz sagt nur, daß man bei solchen Functionen durch Steigerung des Berührunggrades zuletzt immer auf Abweichungen kommen muß, die abnehmen und zwar unbegrenzt abnehmen.

Es ist noch der zweite Hauptfall zu untersuchen, in welchem die Differentialquotienten mit steigender Rangzahl zuletzt unbegrenzt wachsen, sei es nun, daß sie gleich vom ersten an gerechnet wachsen, oder daß das Wachsen erst bei einem Differentialquotienten von bestimmter Rangzahl eintritt, welche Rangzahl dann sowol von dem Werthe der willkürlich Veränderlichen, für welchen man die Differentialquotienten genommen hat, als von den Constanten der Function abhängen kann. In diesem Falle wird in dem Lagrange'schen Restausdruck mit endlos wachsendem n der Eine Factor $\frac{d^{n+1}f(a+\vartheta x)}{dx^{n+1}}$ einem unendlich großen Zahlenwerthe und der andere Factor $\frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots n(n+1)}$ dem Nullwerthe zueilen, und zwar für jeden Werth a der will-

kürlich Veränderlichen, bei welchem die Berührung stattfindet, und für jedes beliebige vom Berührungspunkte aus genommene Intervall x. Die Grenze, welcher der Restausdruck entgegengeht, kann also in diesem Falle durch $\infty . 0$ bezeichnet werden. Ein Ausdruck, welcher für einen gewissen Werth einer in ihm enthaltenen veränderlichen Zahl in die Form $\infty . 0$ übergeht, kann bei diesem Uebergange im Allgemeinen sowol einen unendlich großen Werth, als den Nullwerth, sowie auch irgend einen endlichen Werth annehmen. Denn wenn der eine Factor immer in stärkerem Maße wächst als der andere abnimmt, so wird das Product in der Annäherung an die Grenze $\infty . 0$ ohne Ende größer, und die Form $\infty . 0$ stellt einen unendlich großen Zahlenwerth vor. Nimmt aber der eine Factor fortwährend in stärkerem Maße ab, als der andere zunimmt, so nimmt das Product ohne Ende ab, und die Form $\infty . 0$ stellt den Nullwerth vor. Nähern sich endlich die Maße des Wachsens und Abnehmens der beiden Factoren fortwährend immer mehr der Gleichheit, je näher man der Grenze $\infty . 0$ kommt, so werden die Veränderungen des Products mit der Annäherung an diese Grenze immer unbedeutender, und die Form $\infty . 0$ stellt einen endlichen Zahlenwerth vor.

Man kann sich dies leicht durch Functionen einer Veränderlichen erläutern, welche für gewisse Werthe der willkürlich Veränderlichen in die Form $\infty . 0$ übergehen. Gewöhnlich wird in den Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung in einem besonderen Capitel nachgewiesen, wie man den wahren Werth sowol des unbestimmten Ausdrucks $\infty . 0$ als anderer unbestimmten Formen, in welche Functionen einer Veränderlichen für einen bestimmten Werth der willkürlich Veränderlichen übergehen können, findet. Da wir diese Untersuchung nicht angestellt haben, so mögen einige ganz einfache Beispiele zur Erläuterung dienen. Wenn man in der Function $x \, \mathrm{Lg} x$ (gemeiner Logarithmus) die Veränderliche x bis zum Nullwerth abnehmend denkt, so geht sie, da $\mathrm{Lg}\, o = -\infty$, in die Form $0 . \infty$ über. Daß

das Product $x Lg x$ mit Verkleinerung des x ohne Ende dem Nullwerth entgegengeht, und folglich in diesem Falle der Werth des Ausdruckes $0.\infty$ gleich Null zu setzen ist, ist leicht zu sehen. Denn verkleinern wir das x fortwährend und geben demselben der Reihe nach etwa die Werthe $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ u. s. w., so sind die zugehörigen gemeinen Logarithmen gleich $-1, -2, -3$ u. s. w., und die Function $x Lg x$ nimmt der Reihe nach die Werthe $-\frac{1}{10}, -\frac{2}{100}, -\frac{3}{1000}$ u. s. w. an, und es unterliegt keinem Zweifel, daß diese Werthe sich unbegrenzt dem Nullwerthe nähern. In der Function $\frac{1}{x}.\frac{1}{Lg x}$, in welcher für $x=0$ der eine Factor $\frac{1}{x}$ unendlich groß, und der andere Factor $\frac{1}{Lg x}$ gleich Null wird, tritt offenbar das Gegentheil ein. Denn die Function $\frac{1}{x}.\frac{1}{Lg x}$ nimmt der Reihe nach die Werthe $-\frac{10}{1}, -\frac{100}{2}, -\frac{1000}{3}$ u. s. w. an, wenn man dem x die Werthe $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ u. s. w. ertheilt und dem Ausdrucke $\infty.0$ ist demnach in diesem Falle ein unendlich großer Werth beizulegen. Um auch ein Beispiel von einem endlichen Werthe des Ausdruckes $\infty.0$ zu geben, so nehmen wir die Function $\left(\frac{\pi}{2}-x\right) tg x$. Setzt man $x=\frac{\pi}{2}$, so wird $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0$ und $tg x=\infty$. Der Werth des Ausdruckes $0.\infty$ ist aber in diesem Falle weder Null noch unendlich, sondern gleich 1. Denn setzen wir $\frac{\sin x}{\cos x}$ statt $tg x$, und schreiben unsere Function in der

Form $\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}.\sin x$, so wird, für $x=\frac{\pi}{2}$, der eine Factor $\sin x$ gleich 1, und in dem andern Factor $\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}$ nähern sich wie bekannt Zähler und Nenner ohne Ende der Gleichheit, je näher x dem Werthe $\frac{\pi}{2}$ kommt, und folglich nähert sich der Werth von $\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}$ ohne Ende der Einheit; und der Ausdruck $\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}$ ist für $x=\frac{\pi}{2}$ nothwendig gleich 1 zu setzen, obgleich er für diesen Werth von x in den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ übergeht.

Kehren wir zurück zu dem Restausdruck der Taylor'schen Reihe. Um ein Beispiel zu geben, in welchem dieser Restausdruck für ein unendlich großes n die Form $\infty.0$ annimmt, so nehmen wir die Function A^x. Die successiven Differentialquotienten derselben sind $lA.A^x$, $(lA)^2.A^x$, $(lA)^3.A^x$, und dieselben werden, wenn A größer ist als die Basis des natürlichen Logarithmensystems und folglich lA größer als 1, vom ersten an gerechnet wachsen, und im Fortgang unbegrenzt wachsen. Drücken wir die willkürlich Veränderliche unserer Function durch $a+x$ aus, und betrachten wir in der Function A^{a+x} die Zahl a als den Werth der willkürlich Veränderlichen, für welchen die Berührung stattfindet, und x als das vom Berührungspunkte aus genommene Intervall, so wird nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$A^{a+x}=A^a+lA.A^a.\frac{x}{1}+(lA)^2A^a.\frac{x^2}{1.2}+\dots\dots$$
$$+(lA)^nA^a.\frac{x^n}{1.2.3\dots n}+(lA)^{n+1}A^{(a+\vartheta x)}.\frac{x^{n+1}}{1.2.3\dots n(n+1)}.$$

Obgleich der Factor $(lA)^{n+1}.A^{(a+\vartheta x)}$ des Restausdruckes für ein unendlich großes n unendlich groß wird, so

geht doch der ganze Restausdruck dem Nullwerthe entgegen. Denn schreibt man denselben in der Form

$$A^{(a+\vartheta x)} \cdot \frac{(lA.x)^{n+1}}{1.2.3....n(n+1)}$$

so sieht man, daß der Ausdruck $\frac{(lA.x)^{n+1}}{1.2.3....n(n+1)}$ so gut als der Ausdruck $\frac{x^{n+1}}{1.2.3....n(n+1)}$ sich mit wachsendem n dem Nullwerthe nähert, und daß folglich, da der Factor $A^{(a+\vartheta x)}$ für jeden endlichen Werth von x einen endlichen Werth hat, der ganze Restausdruck sich unbegrenzt dem Nullwerthe nähert.

Wenn nun, wie man sieht, auch bei solchen Functionen, deren Differentialquotienten mit steigender Rangzahl unendlich groß werden, der Restausdruck der Taylor'schen Reihe dem Nullwerthe sich nähern kann, so entsteht die Frage, worin denn der Unterschied derjenigen Functionen, bei welchen die Grenze $\infty.0$ des Restausdruckes für jedes beliebige Intervall gleich Null zu setzen ist, von den andern Functionen, bei welchen dies nicht der Fall ist, eigentlich besteht. In Betreff dieser Frage kommt man leicht zu dem Resultate, daß es wesentlich darauf ankommt, um wie vielmal ein folgender Differentialquotient größer ist als der vorhergehende, und daß der Restausdruck für jedes beliebige Intervall sich dem Nullwerthe nähert bei allen Functionen, bei welchen die Zahl, welche angibt, um wie vielmal ein folgender Differentialquotient größer ist als der vorhergehende, sich innerhalb endlicher Grenzen hält. Denn da der Factor $\frac{x^{n+1}}{1.2.3....n(n+1)}$ des Restausdruckes sich nicht blos dem Nullwerthe nähert, sondern bei jedem beliebigen Werthe von x ein solcher Werth von n gedacht werden kann, daß die Zahl, welche angibt, um wie vielmal dieser Factor kleiner wird bei dem Uebergange zur nächst höheren Potenz von x, jede beliebig große gegebene Zahl übersteigt, so wird, wenn die beim Fortgange zu einem nächst höheren

Differentialquotienten eintretende verhältnißmäßige Vergrößerung des andern Factors $\frac{d^{n+1}f(a+\vartheta x)}{dx^{n+1}}$ eine gewisse Zahl nicht übersteigt, immer ein solcher Werth von n angegeben werden können, von welchem an bei weiterem Wachsen des n der Factor $\frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots n(n+1)}$ sich fortwährend in stärkerem Maße verkleinert, als der Factor $\frac{d^{n+1}f(a+\vartheta x)}{dx^{n+1}}$ sich vergrößert, und folglich wird sich der ganze Restausdruck unbegrenzt dem Nullwerthe nähern. Bei der vorhergebrauchten Function A^x hat der Factor $\frac{d^{n+1}f(a+\vartheta x)}{dx^{n+1}}$ des Restausdruckes die Form $(lA)^{n+1}.A^{(a+\vartheta x)}$. Wenn nun auch ϑ für den $(n+1)$ten Differentialquotienten einen möglichst kleinen Werth hätte, und beinahe gleich Null wäre, und für den nächsten Differentialquotienten einen möglichst großen, und beinahe gleich 1 wäre, so würde doch der für das Intervall x durchschnittliche Werth des $(n+1)$ten Differentialquotienten größer als $(lA)^{n+1}.A^a$, und der durchschnittliche Werth des nächsten Differentialquotienten kleiner als $(lA)^{n+2}.A^{(a+x)}$ oder $(lA)^{n+2}.A^a.A^x$ sein, und folglich kann die verhältnißmäßige Vergrößerung eines folgenden Differentialquotienten den Zahlenwerth $lA.A^x$ nicht erreichen.

Als Functionen, bei denen der Restausdruck der Taylor'schen Reihe sich nicht nothwendig zuletzt dem Nullwerthe unbegrenzt nähert, bleiben uns demnach schließlich nur diejenigen übrig, bei welchen die verhältnißmäßige Vergrößerung eines folgenden Differentialquotienten mit steigender Rangzahl derselben selbst maßlos wächst. Beispiel einer solchen Function ist lx. Der nte Differentialquotient derselben ist $\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{x^n}$. Man sieht, daß n immer so groß genommen werden kann, daß die Zahl, welche angibt, um wie vielmal der folgende Differentialquotient größer ist als der vorhergehende, jede be-

liebig große gegebene Zahl übersteigt. Bei solchen Functionen befinden sich nun die beiden Factoren des Restausdruckes der Taylor'schen Reihe in Betreff ihrer verhältnißmäßigen Vergrößerung und Verkleinerung in gleichem Falle, indem immer ein solcher Werth von n angegeben werden kann, daß der Factor $\frac{d^{n+1} f(a+\vartheta x)}{dx^{n+1}}$ beliebig vielmal größer und der Factor $\frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots n(n+1)}$ beliebig vielmal kleiner wird, sobald man die Zahl n um eine Einheit wachsen läßt. Ob also bei wachsendem n die verhältnißmäßige Vergrößerung des Factors $\frac{d^{n+1} f(a+\vartheta x)}{dx^{n+1}}$ mehr beträgt als die verhältnißmäßige Verkleinerung des Factors $\frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots n(n+1)}$ oder ob das Umgekehrte stattfindet, d. h. ob der Restausdruck fortwährend wächst oder abnimmt, das wird nicht mehr allgemein aus der Natur der berührten Function bestimmt werden können, sondern wird davon abhängen, wie groß das Intervall x genommen wird, und wie groß der Werth a der willkürlich Veränderlichen, für welchen die Berührung der Functionen stattfinden soll, genommen wird. Denn von dem Werthe der Zahl x hängt das Maß der bei wachsendem n zuletzt nothwendig eintretenden Verkleinerung des Factors $\frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots n(n+1)}$ ab, und von a und x zugleich hängt der Werth $(a+\vartheta x)$ der willkürlich Veränderlichen ab, für welchen der $(n+1)$te Differentialquotient genommen wird, und folglich hängt von a und x auch das Maß der Vergrößerung ab, welche der Factor $\frac{d^{n+1} f(a+\vartheta x)}{dx^{n+1}}$ bei wachsendem n erleidet. Daß nun bei den hier in Betracht gezogenen Functionen für jeden Werth a der willkürlich Veränderlichen der Werth des Intervalles x immer so groß genommen werden kann, daß der Restausdruck fortwährend wächst, und immer so klein, daß derselbe fortwährend ab-

nimmt, ist daraus einleuchtend, daß das Maß der Verkleinerung, welche der Factor $\frac{x^{n+1}}{1.2.3...n(n+1)}$ bei Fortgang von einer Potenz zur nächsthöheren erleidet, durch Veränderung der Zahl x in allen denkbaren Graden abgestuft werden kann. Wie wenig auch das Maß der mit steigender Rangzahl eintretenden verhältnißmäßigen Vergrößerung des Factors $\frac{d^{n+1}f(a+\vartheta x)}{dx^{n+1}}$ wächst, so ist doch immer ein großer Werth von x denkbar, daß das Maß der in den entsprechenden Werthen des Factors $\frac{x^{n+1}}{1.2.3...n(n+1)}$ eintretenden verhältnißmäßigen Verkleinerung geringer ist, und folglich der Restausdruck mit steigendem Berührungsgrade immer größer wird. Ebenso wird umgekehrt die bei jedem folgenden Differentialquotienten eintretende verhältnißmäßige Vergrößerung des Factors $\frac{d^{n+1}f(a+\vartheta x)}{dx^{n+1}}$ durch die in den entsprechenden Werthen des Factors $\frac{x^{n+1}}{1.2.3....n(n+1)}$ eintretende verhältnißmäßige Verkleinerung überboten werden können, sobald man nur das Intervall x klein genug macht. Es gibt also bei allen solchen Functionen für jeden Werth a der willkürlich Veränderlichen eine Grenze des Intervalles x, unterhalb deren der Restausdruck in ein unbegrenztes Abnehmen, und oberhalb deren derselbe in ein unbegrenztes Wachsen übergehen muß.

Betrachten wir z. B. die Function lx, so haben wir nach der Taylor'schen Reihe

$$l(a+x)=la+\frac{1}{a}.\frac{x}{1}-\frac{1}{a^2}.\frac{x^2}{1.2}+\frac{1.2}{a^3}.\frac{x^3}{1.2.3}$$
$$-\frac{1.2.3}{a^4}.\frac{x^4}{1.2.3.4}\cdots\cdots+\frac{1.2.3...(n-1)}{a^n}.\frac{x^n}{1.2.3....n}\cdots$$

und der Restausdruck dieser Reihe ist

$$\frac{1.2.3...n}{(a+\vartheta x)^{n+1}}.\frac{x^{n+1}}{1.2.3....n(n+1)} \text{ oder } \left(\frac{x}{a+\vartheta x}\right)^{n+1}.\frac{1}{n+1}.$$

Ist x kleiner als a, und folglich $\frac{x}{a}$ und ebenso $\frac{x}{a+\vartheta x}$ ein ächter Bruch, so wird der Werth von $\left(\frac{x}{a+\vartheta x}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{n+1}$ mit wachsendem n fortwährend kleiner und nähert sich unbegrenzt dem Nullwerthe. Sobald also bei der Function lx das vom Berührungspunkte aus genommene Intervall kleiner ist als der Werth der willkürlich Veränderlichen, für welchen die Berührung statthat, so wird die ins Unendliche fortgesetzte berührende Function der Function lx adäquat sein. Daß in dem Falle, als x größer ist wie a, die berührende Function zuletzt immer stärker abweichen muß von der Berührten lx, kann man am leichtesten aus dem allgemeinen Gliede der obigen Reihe ableiten. Denn das nte Glied der Reihe ist $\left(\frac{x}{a}\right)^n \cdot \frac{1}{n}$. Wie wenig auch $\left(\frac{x}{a}\right)$ größer sein möge als 1, so läßt sich doch ein so großer Werth von n denken, daß bei weiterem Wachsen des n der Factor $\left(\frac{x}{a}\right)^n$ in stärkerem Maße wächst als der Factor $\frac{1}{n}$ abnimmt. Von da an müssen also die einzelnen Glieder der Taylor'schen Reihe immer größer werden und unbegrenzt wachsen, und folglich muß auch die Abweichung der berührenden Function unbegrenzt wachsen.

Das Wichtigste würde nun ohne Zweifel sein, ein allgemeines Verfahren anzugeben, durch welches man bei solchen Functionen die Grenze bestimmen kann, innerhalb und außerhalb welcher der Restausdruck sich zuletzt nothwendig dem Nullwerthe oder dem Unendlichen nähert. Aber an einem solchen Verfahren fehlt es noch gänzlich, und die Aufsuchung dieser Grenzen wird bei den einzelnen Functionen, wo sie gelingt, bewerkstelligt durch Mittel, welche sich in der Regel nur speciell auf die der Untersuchung vorliegende Function beziehen, und sich im Wesentlichen nicht unterscheiden von den in der niederen Analysis gebräuchlichen

Mitteln der Untersuchung der Convergenz oder Divergenz der Reihen. Da uns mit der Kenntniß dieser Grenzen für einzelne Functionen nicht gedient sein kann, so lassen wir diese Untersuchungen bei Seite, und bemerken nur noch, daß auch außerhalb dieser Grenzen die berührende Function bis zu einem gewissen Berührungsgrade sich dem Werthe der berührten Function sehr wohl immer mehr nähern kann, und daß durch den obigen Satz nur das endliche Eintreten einer unbegrenzt wachsenden Abweichung behauptet wird, wie ja umgekehrt auch berührende Functionen, die sich zuletzt nothwendig der berührten Function unbegrenzt nähern, in niederen Berührungsgraden immer stärker werdende Abweichungen zeigen können.

Da innerhalb gewisser Grenzen des vom Berührungspunkte aus genommenen Intervalles bei allen Functionen durch in höheren Graden berührende Functionen eine unbegrenzte Annäherung an den Functionswerth erzielt werden kann, so wird man in allen den Fällen, in welchen man nur die Veränderung bestimmen will, die eine Function innerhalb eines beliebig kleinen von einem gegebenen Punkte aus genommenen Intervalles erleidet, ohne Weiteres die Taylor'sche Reihe gebrauchen können, und es wird unbedingt gestattet sein, jeder beliebigen Function die durch die Taylor'sche Reihe gegebene Potenzenreihe zu substituiren, wobei aber, wie sich von selbst versteht, immer vorausgesetzt ist, daß die Differentialquotienten der berührten Function, so viel man deren nimmt, im Berührungspunkte endliche Werthe haben. Will man z. B. wissen, ob eine Function für einen gewissen Werth a der willkürlich Veränderlichen einen größten Werth annimmt, so kommt es nur darauf an, zu wissen, ob es vor und nach dem Werthe a ein wie klein auch immer zu nehmendes Intervall gibt, für dessen sämmtliche Punkte die Function kleinere Werthe hat als für den Punkt a. Diese Frage kann also nicht blos für jeden einzelnen Werth einer beliebigen Function durch die Taylor'sche Reihe entschieden werden, sondern es können auch aus der Betrach-

tung der Taylor'schen Reihe allgemeingültige Regeln über die Bedingungen des Vorhandenseins eines größten Functionswerthes aufgestellt werden. Ein ähnlicher Fall der Untersuchung ist es, wenn man von zwei Linien, die in irgend einem Punkte eine gemeinschaftliche Ordinate haben, und die sich dabei in einem beliebigen Grade berühren mögen, entscheiden will, ob bei diesem Zusammentreffen die Eine auf derselben Seite der Andern bleibt, oder ob beide Linien sich kreuzen. Hier ist nur zu bestimmen, ob es vor oder nach dem Punkte des Zusammentreffens Intervalle, wenn auch beliebig kleine, gibt, innerhalb derer die Ordinate der einen Linie größere Werthe hat als die der andern, oder ob die Ordinate der einen Linie in dem ersten Intervalle größere und in dem zweiten kleinere Werthe hat als die Ordinate der andern. In sofern nun vorausgesetzt wird, daß die Differentialquotienten beider Functionen, so viel man deren nimmt, für den Punkt des Zusammentreffens endliche Werthe haben, können durch die Taylor'sche Reihe allgemeingültige Regeln aufgestellt werden darüber, ob die in irgend einem Grade sich berührenden Linien im Punkte des Zusammentreffens sich kreuzen oder nicht.

Es ist bisher immer nur von der Taylor'schen Reihe und dem Restausdrucke derselben die Rede gewesen, und man könnte fragen, unter welchen Bedingungen die übrigen Reihen, die sämmtlich Ausdrücke einer in einem höheren Grade berührenden und in demselben Grade gleichmäßig wachsenden Function sind, eine unbegrenzte Annäherung an den Werth der berührten Function gestatten. Man wird aber bemerken, daß die bei Zugrundelegung der Taylor'schen Reihe gefundenen Resultate mit der Natur dieser Reihe speciell nichts zu schaffen haben. Denn die Vorstellung einer im nten Grade berührenden und im $(n+1)$ten Grade gleichmäßig wachsenden Function, deren constante Stärke des Wachsens mit derjenigen Stärke des Wachsens im $(n+1)$ten Grade der berührten Function, welche für das vom Berührungspunkte aus genommene Intervall die

durchschnittliche ist, zusammenfällt, aus welcher Vorstellung der Restausdruck der Taylor'schen Reihe abgeleitet war, läßt sich unverändert auf alle Ausdrücke einer in einem höheren Grade gleichmäßig wachsenden und berührenden Function übertragen; und da die Betrachtung des Restausdruckes der Taylor'schen Reihe nur auf die Beschaffenheit der Differentialquotienten der berührten Function als auf das Wesentliche, wovon die Annäherung abhängt, geführt hat, so sieht man, daß alle Ausdrücke für solche berührende Functionen eine unbegrenzte Annäherung an die berührte gestatten werden, entweder für jedes oder nur für ein innerhalb gewisser Grenzen genommenes Intervall genau unter denselben Umständen, unter welchen die Taylor'sche Reihe eine solche Annäherung gestattet.

Das Resultat der Untersuchungen dieses Paragraphen können wir in folgenden Satz zusammenfassen: Unter der Voraussetzung, daß eine Function und ihre sämmtlichen Differentialquotienten innerhalb eines Intervalles keine Unterbrechung ihrer Stetigkeit erleiden, werden die in höheren Graden berührenden und in denselben Graden gleichmäßig wachsenden Functionen bei gehöriger Steigerung des Berührungsgrades zuletzt immer eine unbegrenzte Annäherung an den Werth der berührten Function liefern für jedes beliebige Intervall der willkürlich Veränderlichen, sobald entweder die Differentialquotienten selbst oder die verhältnißmäßigen Vergrößerungen der aufeinander folgenden Differentialquotienten bei beliebig hoher Rangzahl in angebbaren endlichen Grenzen bleiben, und diese berührenden Functionen werden nur für ein innerhalb gewisser Grenzen zu nehmendes Intervall eine unbegrenzte Annäherung gestatten, wenn die verhältnißmäßige Vergrößerung eines folgenden Differentialquotienten mit steigender Rangzahl unbegrenzt wächst.

§. 134.

Cauchy hat noch eine andere Form des Restes der Taylor'schen Reihe auf einem etwas künstlichen Wege abgeleitet. Nicht wegen der Wichtigkeit der Sache selbst, sondern weil dieser Restausdruck in alle neueren Lehrbücher der Differentialrechnung übergegangen und neben dem Lagrange'schen in Gebrauch gekommen ist, wollen wir denselben hier kurz entwickeln. Die Cauchy'sche Ableitung läuft ungefähr auf Folgendes hinaus: Bezeichnet man den Rest der bis zum nten Gliede fortgesetzten Taylor'schen Reihe durch R, so hat man Der Cauchy'sche Restausdruck.

$$f(x) = f(a) + \frac{df(a)}{dx} \cdot \frac{x-a}{1} + \frac{d^2f(a)}{dx^2} \cdot \frac{(x-a)^2}{1.2} \cdots$$

$$+ \frac{d^nf(a)}{dx^n} \cdot \frac{(x-a)^n}{1.2.3 \ldots n} + R.$$

Wenn der Werth a der willkürlich Veränderlichen, für welchen die Berührung stattfindet, wie gewöhnlich zwar unbestimmt aber unveränderlich genommen wird, und die Zahl x als veränderlich, so kann man den Rest als eine Function von x oder von dem Intervalle x — a betrachten. Wenn wir aber, was auch gestattet ist, die Zahl x als unveränderlich annehmen, und die Zahl a als veränderlich, so wird, da in diesem Falle für jeden andern Werth von a auch der Werth des Restes ein anderer werden muß, der Restausdruck auch als eine Function von a betrachtet werden können. Es mögen die Ordinaten der Linie efg (Fig. 66) die durch die Taylor'sche Reihe zu berechnende Function, das Abscissenstück bd möge die Zahl x und das Stück bc die Zahl a vorstellen. Wenn man nun bei unveränderlichem Werthe von bd den Punkt c, für welchen die im nten Grade berührende Linie ihren Berührungspunkt hat, verschiebbar setzt, so wird es für jeden andern Werth von bc oder der Zahl a einen andern Werth des Restes geben, um welchen die im nten Grade gleichmäßig wachsende und

im nten Grade berührende Function von dem festen Werthe dg oder f(x) abweicht. Die bei dieser Verschiebung des Berührungspunktes hervortretenden Eigenschaften der den Rest angebenden Function hat Cauchy zur Entwickelung dieser Function benutzt.

In sofern wir in der obigen Reihe die Zahl a veränderlich setzen, haben wir die Werthe, welche die Differentialquotienten der Function f(x) für einen beliebigen Werth a annehmen, durch $\frac{df(a)}{da}$, $\frac{d^2f(a)}{da^2}$ u. s. w. zu bezeichnen. Stellen wir die Function von a, welche dem R der obigen Gleichung gleich sein soll, durch $\varphi(a)$ vor, und bezeichnen wir x als eine Constante durch C, so nimmt die obige Gleichung folgende Form an:

$$f(C)=f(a)+\frac{df(a)}{da}.\frac{C-a}{1}+\frac{d^2f(a)}{da^2}.\frac{(C-a)^2}{1.2}\dots$$
$$+\frac{d^nf(a)}{da^n}.\frac{(C-a)^n}{1.2\dots n}+\varphi(a).$$

Wenn wir a so weit wachsen lassen, daß es gleich C wird, so ist, wie die Gleichung zeigt, der Restausdruck gleich Null. Wir haben also $\varphi(C)=0$ zu setzen. Bilden wir aus der vorliegenden Gleichung durch Transposition die Gleichung

$$\varphi(a)=f(C)-f(a)-\frac{df(a)}{da}.\frac{C-a}{1}-\frac{d^2f(a)}{da^2}.\frac{(C-a)^2}{1.2}\dots$$
$$-\frac{d^nf(a)}{da^n}.\frac{(C-a)^n}{1.2\dots n}$$

und nehmen wir beiderseits die Differentialquotienten für a als willkürlich Veränderliche, so werden, wenn man von den Gliedern $\frac{df(a)}{da}.\frac{C-a}{1}$, $\frac{d^2f(a)}{da^2}.\frac{(C-a)^2}{1.2}$ u. s. w., als Producten zweier Functionen von a betrachtet, nach den bekannten Regeln die Differentialquotienten nimmt, auf der rechten Seite der Gleichung alle Glieder sich gegenseitig aufheben, und es wird nur der Ausdruck $-\frac{(C-a)^n}{1.2\dots n}.\frac{d^{n+1}f(a)}{da^{n+1}}$

als der Differentialquotient der rechten Seite der Gleichung übrig bleiben, und man erhält die Gleichung

$$\frac{d\varphi(a)}{da} = -\frac{(C-a)^n}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{d^{n+1}f(a)}{da^{n+1}}.$$

Läßt man a bis zum Werthe C wachsen, so wird, wie diese letzte Gleichung zeigt, der Differentialquotient der Function $\varphi(a)$ gleich Null, oder es ist $\frac{d\varphi(C)}{da} = 0$. Mit dem Wachsen des Intervalles $C-a$, d. h. mit dem Abnehmen des a wird im Allgemeinen ein Wachsen der Function $\varphi(a)$ verbunden sein. Wir können uns die Werthe der Function $\varphi(a)$, von der wir wissen, daß sie selbst und ihr erster Differentialquotient im Punkte d (Fig. 66) gleich Null ist, durch die Ordinaten einer Linie, wie etwa der Linie dhi versinnlichen. Die Stärke des Wachsens im ersten Grade der Function $\varphi(a)$ hat in irgend einem zwischen den Punkten c und d gelegenen Punkte ihren für das Intervall $C-a$ durchschnittlichen Werth. Wenn wir den Werth der Abscisse, für welchen dieser durchschnittliche Werth statthat, durch $a + \vartheta_1(C-a)$ bezeichnen, wobei ϑ_1 zwischen den Grenzen von 0 und 1 zu denken ist, so können wir die einem beliebigen Werthe a zugehörige Ordinate ch oder $\varphi(a)$ nach §. 132 ausdrücken durch den Einzelwerth $\varphi(C)$ und den mit dem Intervalle $C-a$ multiplicirten Durchschnittswerth der Stärke des Wachsens der Function $\varphi(a)$. Und da hier C größer ist als a, so erhalten wir, indem wir die Regel des §. 132 für ein von dem festen Werthe C aus rückwärts genommenes Intervall modificiren,

$$\varphi(a) = \varphi(C) - \frac{d\varphi[a + \vartheta_1(C-a)]}{da} \cdot (C-a).$$

Es ist aber, wie oben gezeigt, $\varphi(C) = 0$, und folglich

$$\varphi(a) = -\frac{d\varphi[a + \vartheta_1(C-a)]}{da} \cdot (C-a).$$

Da hier $\varphi(a)$ durch einen gewissen Werth des Differentialquotienten von $\varphi(a)$ ausgedrückt erscheint, und der Diffe-

rentialquotient $\frac{d\varphi a}{da}$ schon oben auf einen Differentialquotienten von f(a) zurückgebracht ist, so können wir auch φ(a) durch einen Differentialquotienten von f(a) ausdrücken. Setzen wir, da der obige für $\frac{d\varphi(a)}{da}$ gegebene Ausdruck für jeden Werth der Veränderlichen a gilt, in diesem Ausdrucke statt a den Werth $a+\vartheta_1(C-a)$, so haben wir

$$\frac{d\varphi[a+\vartheta_1(C-a)]}{da}=-\frac{[C-a-\vartheta_1(C-a)]^n}{1.2.3.....n}\cdot\frac{d^{n+1}f[a+\vartheta_1(C-a)]}{da^{n+1}}.$$

Substituiren wir nun in dem für φ(a) gefundenen Ausdrucke statt $\frac{d\varphi[a+\vartheta_1(C-a)]}{da}$ den gleichgeltenden Werth, so haben wir

$$\varphi(a)=\frac{[C-a-\vartheta_1(C-a)]}{1.2.3....n}\cdot\frac{d^{n+1}f[a+\vartheta_1(C-a)]}{da^{n+1}}.(C-a)$$

da statt $[C-a-\vartheta_1(C-a)]^n$ auch geschrieben werden kann $[(C-a)(1-\vartheta_1)]^n$ oder $(C-a)^n.(1-\vartheta_1)^n$, so ist auch

$$\varphi(a)=\frac{(C-a)^{n+1}.(1-\vartheta_1)^n}{1.2.3....n}\cdot\frac{d^{n+1}f[a+\vartheta_1(C-a)]}{da^{n+1}}$$

und diese Form ist es, welche Cauchy dem Restausdrucke der Taylor'schen Reihe gegeben hat. Indem wir in unsere obige ursprüngliche Gleichung statt φ(a) diesen Restausdruck setzen, haben wir

$$f(C)=f(a)+\frac{df(a)}{da}\cdot\frac{(C-a)}{1}+\frac{d^2f(a)}{da^2}\cdot\frac{(C-a)^2}{1.2}+....$$
$$+\frac{d^nf(a)}{da^n}\cdot\frac{(C-a)^n}{1.2.3....n}+\frac{d^{n+1}f[a+\vartheta_1(C-a)]}{da^{n+1}}$$
$$\cdot\frac{(1-\vartheta_1)^n.(C-a)^{n+1}}{1.2.3....n}.$$

Da C zwar im Laufe der gegebenen Entwickelung als constant angesehen worden ist, übrigens aber einen ganz beliebigen Zahlenwerth vorstellt, so kann man in dem gefundenen Resultate auch C wieder als die willkürlich Veränderliche betrachten, und als den beliebigen aber einzelnen Werth der willkürlich Veränderlichen, für welchen die Be=

rührung der Functionen stattfindet, und indem man wieder den Buchstaben x statt C setzt, erhält man

$$f(x)=f(a)+\frac{df(a)}{dx}\cdot\frac{x-a}{1}+\frac{d^2f(a)}{dx^2}\cdot\frac{(x-a)^2}{1.2}+\ldots\ldots$$
$$+\frac{d^nf(a)}{dx^n}\cdot\frac{(x-a)^n}{1.2.3\ldots.n}+\frac{d^{n+1}f[a+\vartheta_1(x-a)]}{dx^{n+1}}$$
$$\cdot\frac{(1-\vartheta_1)^n.(x-a)^{n+1}}{1.2.3\ldots n}.$$

Drücken wir endlich das vom Berührungspunkte aus genommene Intervall der willkürlich Veränderlichen durch den einfachen Buchstaben x aus, und folglich die ganze willkürlich Veränderliche durch $a+x$, so haben wir

$$f(a+x)=f(a)+\frac{df(a)}{dx}\cdot\frac{x}{1}+\frac{d^2f(a)}{dx^2}\cdot\frac{x^2}{1.2}+\ldots.$$
$$+\frac{d^nf(a)}{dx^n}\cdot\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}+\frac{d^{n+1}f(a+\vartheta_1 x)}{dx^{n+1}}\cdot\frac{(1-\vartheta_1)^n.x^{n+1}}{1.2.3\ldots.n}.$$

Der Lagrange'sche Restausdruck ist

$$\frac{d^{n+1}f(a+\vartheta x)}{dx^{n+1}}\cdot\frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots n(n+1)}.$$

Die Abweichung beider Formen erklärt sich daraus, daß ϑ in dem Lagrange'schen Restausdruck eine andere Zahl bedeutet, als ϑ_1 in dem Cauchy'schen. Denn $a+\vartheta x$ stellt den Werth der willkürlich Veränderlichen vor, bei welchem die Stärke des Wachsens im $(n+1)$ten Grade der Function $f(a+x)$ ihren für das Intervall x durchschnittlichen Werth hat, und $a+\vartheta_1 x$ stellt den Werth der willkürlich Veränderlichen vor, bei welchem die Stärke des Wachsens im ersten Grade der den Rest angebenden Function $\varphi(a)$ ihren für das Intervall x durchschnittlichen Werth hat. Es ist keine Kunst, durch Veränderung der Bedeutung des Buchstabens ϑ noch andere Formen des Restausdruckes der Taylor'schen Reihe zu finden. Da sie aber alle im Wesentlichen auf die Form des Lagrange'schen hinauslaufen, indem sie aus zwei Factoren bestehen, von denen der Eine einen einzelnen Werth eines höheren Differentialquotienten der Function $f(a+x)$, und der Andere eine Potenz des Intervalles x, dividirt

durch das Product der natürlichen Zahlenreihe, darstellt, so läßt sich kein Nutzen dieser unwesentlichen Modificationen des Restausdruckes absehen.

Elftes Capitel.

Von den Uebergangspunkten der Stärke des Wachsens in allen Graden.

§. 135.

Von dem Zeichenwechsel der Functionen und ihrer Differentialquotienten.

Einen Gegenstand von allgemeinerer Bedeutung für das Wesen der Differentialrechnung bilden noch die in dem Fluß einer Function vorkommenden Uebergänge aus einer Art des Wachsens in die andere. Wie wir aus dem Früheren (§. 124) wissen, sind alle Arten des Wachsens bestimmt durch die Vorzeichen der successiven Differentialquotienten, und mithin kann ein Uebergang aus Einer Art des Wachsens in eine Andere nur vorkommen, wo ein Differentialquotient sein Vorzeichen wechselt. Wir haben demnach den Wechsel der Vorzeichen der Differentialquotienten und die damit verbundenen Eigenthümlichkeiten des Wachsens ins Auge zu fassen. Eigentlich kann ein Zeichenwechsel bei einem Ausdrucke nur eintreten, wenn eine Function einer Veränderlichen, als Bestandtheil dieses Ausdruckes, bei irgend einem Werthe der Veränderlichen durch den Nullwerth hindurchgeht, und dabei aus positiven in negative Werthe oder umgekehrt übergeht. Da aber in dem Falle, als eine Function einer Veränderlichen in Form eines Quotienten zweier Functionen gegeben ist, diejenige Function, welche den Nenner bildet, mit Zeichenwechsel durch den Nullwerth gehen kann, ohne daß der Zähler gleich Null

wird, so wird der Quotient oder die Gesammtfunction ihr Vorzeichen wechseln, und mit diesem Zeichenwechsel ein unendlich großer Functionswerth verbunden sein. Wir haben also in Betreff des Zeichenwechsels der Functionen zwei Fälle zu betrachten, den Durchgang des Functionswerthes durch Null und durch das Unendliche.

Obschon nun eine Function nur bei dem Durchgange durch Null oder das Unendliche ihr Vorzeichen wechseln kann, so kann sie doch natürlich auch ohne Zeichenwechsel diese Werthe passiren. Wenn eine Function den Werth Null oder unendlich mit positiven Werthen erreicht, und auch mit positiven Werthen wieder verläßt, oder wenn eine Function in den Werth Null oder unendlich mit negativen Werthen eintritt, und mit negativen Werthen austritt, so wollen wir sagen, daß die Function einstimmig durch Null oder das Unendliche fortschreitet. Erreicht hingegen eine Function den Werth Null oder unendlich mit positiven Werthen, und verläßt sie dieselben mit negativen Werthen, oder tritt sie mit negativen Werthen in dieselben ein, und mit positiven heraus, so sagen wir, die Function schreitet entgegengesetzt durch Null oder unendlich fort. Obgleich eine Function in dem Momente, wo sie den Nullwerth annimmt, weder positiv noch negativ zu nennen ist, so sagen wir doch bei dem einstimmigen Durchgange durch Null kurzweg, die Function schreitet positiv oder negativ durch den Nullwerth, je nachdem die Functionswerthe vor und nach dem Durchgange durch Null positiv oder negativ sind. Ob eine Aenderung in der Art des Wachsens irgend eines Grades bei dem Durchgange des Werthes eines Differentialquotienten durch Null oder unendlich eintritt oder nicht, das wird immer davon abhängen, ob ein solcher Differentialquotient entgegengesetzt oder einstimmig durch Null oder unendlich fortschreitet, weil nur der Zeichenwechsel eines Differentialquotienten eine Aenderung der Art des Wachsens hervorbringen kann.

In Bezug auf den Zusammenhang, welcher zwischen

dem Functionswerthe und dem Werthe des ersten Differentialquotienten stattfindet bei dem Durchgange des Functionswerthes durch Null oder unendlich, unterscheiden sich diese beiden Durchgänge wesentlich von einander. Bei dem Durchgange eines Functionswerthes durch das Unendliche hat der Differentialquotient dieser Function nothwendig auch einen unendlichen Werth. Dies folgt daraus, daß, sobald der Differentialquotient einer Function innerhalb eines Intervalles und im Endpunkte dieses Intervalles durchaus endliche Werthe hat, die Function keinen unendlich großen Werth im Endpunkte des Intervalles annehmen kann. Das Umgekehrte gilt natürlich nicht. Denn der Differentialquotient einer Function kann in einem Intervalle wohl maßlos wachsen, und im Endpunkte desselben unendlich groß werden, ohne daß die Function einen unendlich großen Werth erreicht. Betrachten wir hingegen den Durchgang eines Functionswerthes durch Null, so kann der Differentialquotient dieser Function dabei sowol den Nullwerth, als einen endlichen Werth, als auch einen unendlichgroßen Werth annehmen. Mag der Functionswerth einstimmig oder entgegengesetzt durch Null gehen, so kann in beiden Fällen der Differentialquotient gleich Null sein, wie der Differentialquotient der Ordinaten der Linie uai (Fig. 50) im Punkte a, oder der Differentialquotient der Ordinaten der Linie fgchi (Fig. 56) im Punkte c, und in beiden Fällen kann der Differentialquotient unendlich sein, wie der Differentialquotient der Ordinaten der Linie decfg (Fig. 67) im Punkte c, oder der Differentialquotient der Ordinaten der Linie abcde (Fig. 68) im Punkte c. Einen endlichen Werth hingegen kann der Differentialquotient einer durch den Nullwerth fortschreitenden Größe nur haben, wenn der Functionswerth entgegengesetzt durch Null geht. Denn wäre die Function einstimmig durch Null gegangen, so hätte sie, wenn sie positiv war, vor dem Nullwerthe abgenommen und nachher zugenommen, und wenn sie negativ war, vor dem Nullwerthe zugenommen und nachher abgenommen, und in beiden

Fällen hätte der Differentialquotient sein Vorzeichen gewechselt, konnte also bei diesem Wechsel nur den Werth Null oder unendlich, aber keinen endlichen Werth haben.

Da in Bezug auf den Zusammenhang des Functionswerthes und des Werthes des ersten Differentialquotienten der Durchgang des Functionswerthes durch das Unendliche sich einfacher erweist, als der Durchgang durch Null, so lassen wir die Betrachtung des ersten Durchganges vorangehen. Daraus, daß beim Durchgange einer Function durch das Unendliche auch der Differentialquotient dieser Function unendlich wird, folgt selbstverständlich, daß wenn ein Differentialquotient irgend einer Rangzahl für einen gewissen Werth der willkürlich Veränderlichen unendlich groß wird, alle folgenden Differentialquotienten für denselben Werth der willkürlich Veränderlichen ebenfalls unendlich groß werden. Bei allen den folgenden Sätzen, welche von dem Uebergange der Functionen aus positiven Werthen in negative oder dem umgekehrten Uebergange handeln, ist immer vorausgesetzt, daß die Veränderungen der willkürlich Veränderlichen durch Zusetzung von positiven Incrementen hervorgebracht werden, und in diesem Sinne das Fortschreiten der Functionswerthe zu nehmen ist, mag nun die willkürlich Veränderliche positive oder negative Werthe haben.

In Betreff der für einen gewissen Werth der willkürlich Veränderlichen unendlich werdenden Functionen und ihrer ersten Differentialquotienten gelten folgende Sätze:

1) Geht für einen gewissen bestimmten Werth der willkürlich Veränderlichen eine Function einstimmig durch das Unendliche, so geht der Differentialquotient dieser Function für denselben Werth der willkürlich Veränderlichen entgegengesetzt durch das Unendliche.

Da die Function, wenn sie mit positiven Werthen durch das Unendliche geht, vor diesem Durchgange gewachsen ist, und nachher abgenommen hat, so ist der Differentialquotient derselben aus positiven in negative Werthe durch das Unendliche übergegangen, und da ferner die

Function, wenn sie mit negativen Werthen durch das Unendliche geht, vorher abgenommen und nachher zugenommen hat, so ist der Differentialquotient derselben aus negativen Werthen in positive durch das Unendliche übergegangen. Beispiel einer solchen Function sind die Ordinaten der Linie fghikl (Fig. 69), welche nach der Ordinatengleichung $y = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$ gebildet ist, und für $x = o$ oder im Punkte c der Figur mit positiven Werthen durch das Unendliche geht.

2) Geht eine Function entgegengesetzt durch das Unendliche, so geht ihr Differentialquotient einstimmig durch das Unendliche, und zwar wird der Differentialquotient, wenn die Function aus positiven in negative Werthe übergeht, positiv unendlich, und wenn die Function aus negativen in positive Werthe übergeht, negativ unendlich.

Hat nämlich eine Function das Unendliche mit positiven Werthen erreicht, und tritt sie mit negativen aus demselben heraus, so sind erst die positiven Werthe immer größer und dann die negativen immer kleiner geworden, und in beiden Fällen ist der Differentialquotient dieser Function positiv. Hat aber umgekehrt eine Function das Unendliche mit wachsenden negativen Werthen erreicht, und verläßt sie dasselbe mit abnehmenden positiven, so ist in beiden Fällen der Differentialquotient dieser Function negativ. Beispiel einer solchen Function ist die Ordinate der Linie abcdef (Fig. 70), welche nach der Ordinatengleichung $y = \frac{1}{1-x}$ gebildet ist, im Punkte h den Nullpunkt der Abscisse hat, und für $x = 1$ oder im Punkte g der Abscisse entgegengesetzt durch das Unendliche geht.

Aus den beiden vorhergehenden Sätzen folgt zunächst, daß die successiven Differentialquotienten, wenn sie für einen Werth der willkürlich Veränderlichen unendlich werden, in Bezug auf die Einstimmigkeit oder Entgegensetzung, mit

welcher sie durch das Unendliche hindurchgehen, regelmäßig abwechseln. In sofern man eine Regel haben will, nach welcher man aus der Beschaffenheit eines für einen bestimmten Werth der willkürlich Veränderlichen unendlich werdenden Differentialquotienten auf den zugehörigen Werth der Function oder auf die Natur des Wachsens derselben zurückschließen kann, so wird man aus den beiden vorhergehenden Sätzen leicht die folgenden beiden ableiten:

3) Geht ~~ein~~ der Differentialquotient entgegengesetzt durch das Unendliche, und zwar aus positiven Werthen in negative, so geht die Function, wenn sie unendlich ist, mit positiven Werthen durch das Unendliche, und wenn sie endlich ist, aus dem Wachsen ins Abnehmen über, und erlangt einen relativ größten Werth. Geht aber der Differentialquotient durch das Unendliche aus negativen in positive Werthe über, so geht die Function, wenn sie unendlich ist, bei diesem Uebergange, durch das negativ Unendliche, und wenn sie endlich ist, aus dem Abnehmen ins Wachsen über und erreicht einen relativ kleinsten Werth.

4) Geht der Differentialquotient einer Function einstimmig durch das Unendliche, so geht die Function, wenn sie unendlich ist, bei diesem Uebergang entgegengesetzt durch das Unendliche, und wenn sie endlich ist, nicht aus dem Wachsen ins Abnehmen oder umgekehrt über, vielmehr wird die Function, wenn der Differentialquotient durch das positiv Unendliche geht, vor und nach diesem Durchgange wachsen, und wenn der Differentialquotient durch das negativ Unendliche geht, vor und nach diesem Durchgange abnehmen.

Was den Zeichenwechsel der Functionen und ihrer ersten Differentialquotienten bei dem Durchgange durch den Nullwerth betrifft, so gelten darüber folgende Sätze:

5) Geht für einen bestimmten Werth der willkürlich Veränderlichen eine Function einstimmig durch Null, so muß der Differentialquotient dieser Function bei diesem Durchgange sein Vorzeichen wechseln, und derselbe

wird also entgegengesetzt durch Null oder das Unendliche gehen.

Haben nämlich die positiven Werthe der Function bis zu Null abgenommen und dann zugenommen, so ist der Differentialquotient vor dem Nullwerthe der Function negativ und nachher positiv, und haben die negativen Werthe der Function bis zu Null abgenommen und sich dann wieder vergrößert, so ist der Differentialquotient vor dem Nullwerthe der Function positiv und nachher negativ. In beiden Fällen hat also der Differentialquotient bei dem Nullwerth der Function sein Vorzeichen gewechselt, und kann also selbst nur gleich Null oder gleich unendlich sein.

Aus diesem Beweise des Satzes 5 folgt noch als nähere Bestimmung desselben:

6) Geht eine Function mit positiven Werthen durch Null, so geht der Differentialquotient derselben aus negativen Werthen in positive über, und geht die Function mit negativen Werthen durch Null, so geht der Differentialquotient aus positiven Werthen in negative über.

7) Geht bei einem bestimmten Werthe der willkürlich Veränderlichen eine Function entgegengesetzt durch Null, so kann der Differentialquotient dieser Function keinesfalls sein Vorzeichen wechseln; derselbe kann dabei im Allgemeinen jeden beliebigen Werth haben, wenn er aber gleich Null oder unendlich ist, so geht er einstimmig durch diese Werthe.

Geht nämlich eine Function entgegengesetzt durch Null, so hat sie entweder bis zu Null abnehmende positive und dann zunehmende negative Werthe, und in diesem Falle ist der Differentialquotient vor und nach dem Uebergange negativ, oder sie hat bis zu Null abnehmende negative und dann zunehmende positive Werthe, und dann ist der Differentialquotient vor und nach diesem Uebergange positiv.

Aus diesem Beweise des Satzes 7 folgt als nähere Bestimmung desselben zugleich:

8) Geht eine Function entgegengesetzt durch Null aus

positiven Werthen in negative, so ist der Differentialquotient bei diesem Uebergange negativ, und geht sie aus negativen in positive, so ist der Differentialquotient positiv.

Wenn man von einem durch den Nullwerth gehenden ersten Differentialquotienten einer Function auf die Natur des Wachsens dieser Function schließen will, so gelten darüber folgende Sätze:

9) Geht für einen bestimmten Werth der willkürlich Veränderlichen der erste Differentialquotient entgegengesetzt durch Null, so geht die Function bei diesem Durchgange aus dem Wachsen ins Abnehmen oder umgekehrt über, und zwar wird die Function aus dem Wachsen ins Abnehmen übergehen, wenn der Differentialquotient aus positiven Werthen in negative übergeht, und aus dem Abnehmen ins Wachsen, wenn der Differentialquotient aus negativen in positive Werthe übergeht.

Dieser Satz ist aus den früheren allgemeinen Lehren über die Bedeutung der positiven und negativen Werthe des ersten Differentialquotienten einleuchtend.

10) Geht der erste Differentialquotient einer Function einstimmig durch Null, so geht die Function weder aus dem Wachsen ins Abnehmen noch umgekehrt über; vielmehr wird, wenn der Differentialquotient mit positiven Werthen durch Null geht, die Function fortwährend wachsen, so lange der Differentialquotient positive Werthe hat, und fortwährend abnehmen, so lange der Differentialquotient negative Werthe hat.

Aus den Sätzen 5 und 7 folgt zunächst, daß, wenn mehrere aufeinanderfolgende Differentialquotienten für einen gewissen Werth der willkürlich Veränderlichen gleich Null werden, dieselben in Bezug auf die bei diesem Durchgange stattfindende Einstimmigkeit oder Entgegensetzung regelmäßig abwechseln.

Da in dem Falle, als eine Function einstimmig durch Null geht, der erste Differentialquotient, wenn er nicht unendlich ist, entgegengesetzt durch Null gehen muß, so kann

erst der zweite Differentialquotient einen endlichen Werth haben. Ist aber der zweite Differentialquotient selbst gleich Null, in welchem Falle er nach Satz 7 einstimmig durch Null geht, so muß der dritte Differentialquotient, wenn er nicht unendlich ist, nach Satz 5 gleich Null sein, und entgegengesetzt durch Null gehen. Der vierte Differentialquotient kann dann zwar einen endlichen von Null verschiedenen Werth haben; wenn er aber selbst gleich Null ist, und zwar alsdann nothwendig einstimmig durch Null geht, so muß auch der fünfte Differentialquotient, wenn er nicht unendlich ist, gleich Null sein, und erst der sechste Differentialquotient kann einen von Null verschiedenen endlichen Werth haben. Diese Schlußweise läßt sich so fortsetzen, und es ergibt sich daraus folgender Satz:

11) Wenn eine Function einstimmig durch Null geht, und es werden mehrere der nächsten aufeinanderfolgenden Differentialquotienten bei diesem Uebergange gleich Null, so muß derjenige Differentialquotient, welcher zuerst einen von Null verschiedenen Werth annimmt, von gerader Rangzahl sein.

Geht eine Function entgegengesetzt durch Null, so kann der erste Differentialquotient einen endlichen Werth haben. Ist er aber selbst gleich Null, und geht er mithin einstimmig durch Null, so muß auch der zweite Differentialquotient, wenn er nicht etwa unendlich ist, gleich Null sein, und erst der dritte Differentialquotient kann einen endlichen Werth haben. Ist aber auch dieser gleich Null, wobei er nothwendig einstimmig durch Null geht, so muß auch der vierte Differentialquotient, wenn er nicht unendlich ist, gleich Null sein, und erst der fünfte kann einen von Null verschiedenen endlichen Werth annehmen. Auf diese Weise weiter schließend erhält man folgenden Satz:

12) Geht eine Function entgegengesetzt durch Null, und sind mehrere ihrer nächsten Differentialquotienten bei diesem Uebergange gleich Null, so ist derjenige Differentialquotient, welcher zuerst einen von Null verschiedenen endlichen Werth hat, von ungerader Rangzahl.

Es läßt sich aus dem Vorzeichen, welches der zuerst einen endlichen Werth annehmende Differentialquotient hat, auch schließen, mit welchem Vorzeichen, oder mit welchem Wechsel der Vorzeichen die Function durch Null geht. Denn geht die Function einstimmig positiv durch Null, so geht nach Satz 6 der erste Differentialquotient aus negativen Werthen in positive über durch Null. Der zweite Differentialquotient ist in diesem Falle nach Satz 8 positiv. Ist er aber selbst gleich Null, und folglich so gut als die ursprüngliche Function eine mit positiven Werthen durch Null hindurchgehende Größe, so ist aus demselben Grunde der vierte Differentialquotient positiv. Ebenso ist der sechste positiv, wenn etwa der vierte gleich Null war. Wenn eine Function einstimmig negativ durch Null geht, so folgt aus den Sätzen 6 und 8 auf dieselbe Weise, daß der zweite Differentialquotient negativ ist bei diesem Uebergange; ist er aber selbst gleich Null, so ist auch der vierte negativ, und so weiter. Es ergibt sich daraus folgender Satz:

13) Geht eine Function durch Null, und sind mehrere ihrer nächsten Differentialquotienten bei diesem Durchgange gleich Null, so geht die Function mit positiven oder mit negativen Werthen einstimmig durch Null, je nachdem derjenige Differentialquotient von gerader Rangzahl, welcher zuerst einen von Null verschiedenen endlichen Werth annimmt, positiv oder negativ ist.

Wenn eine Function beim Durchgange durch Null aus positiven Werthen in negative übergeht, so geht der erste Differentialquotient, falls er gleich Null ist, nach Satz 8 mit negativen Werthen durch Null, und mithin geht der zweite Differentialquotient nach Satz 6 aus positiven in negative Werthe über durch Null. Der dritte Differentialquotient ist also negativ, und falls er selbst gleich Null ist, so ist auch der fünfte negativ und so weiter. Geht aber eine Function beim Durchgange durch Null aus negativen Werthen in positive über, so geht der erste Differentialquotient, falls er gleich Null ist, nach Satz 8 mit positi-

ven Werthen durch Null, und mithin muß nach Satz 6 der zweite Differentialquotient aus negativen Werthen in positive übergehen. Der dritte Differentialquotient ist also wieder positiv, und wenn er durch Null geht, so ist aus demselben Grunde auch der fünfte positiv, und so weiter. Es folgt daraus

14) Gehen eine Function und mehrere ihrer nächsten Differentialquotienten durch Null, so geht die Function aus positiven Werthen in negative über, wenn derjenige Differentialquotient von ungerader Rangzahl, welcher zuerst einen von Null verschiedenen endlichen Werth annimmt, negativ ist, und die Function geht aus negativen Werthen in positive über, wenn derjenige Differentialquotient von ungerader Rangzahl, welcher zuerst einen von Null verschiedenen endlichen Werth annimmt, positiv ist.

Diese sämmtlichen Sätze über den Zusammenhang des Zeichenwechsels der Functionen und ihrer Differentialquotienten sind von mannichfachem Gebrauche, und es können durch dieselben viele Untersuchungen, welche man sonst durch Vergleichung von Formeln und Reihen führen muß, sehr abgekürzt werden. Es ergibt sich zugleich aus denselben, daß von den verschiedenen Arten des Wachsens irgend eines Grades nur einige ineinander übergehen können und andere nicht. Denn da z. B., sobald irgend ein Differentialquotient sein Vorzeichen wechselt, der folgende Differentialquotient keinen Zeichenwechsel erfahren kann, so werden alle Uebergänge der Arten des Wachsens irgend eines Grades, welche einen Zeichenwechsel dieses Grades und zugleich des vorhergehenden Grades voraussetzen, unmöglich sein. Welche Uebergänge überhaupt möglich sind, und welche nicht, wird aus den aufgestellten Sätzen ohne Schwierigkeit beantwortet werden können.

§. 136.

Aufsuchung der größten und kleinsten Werthe der Functionen.

Alle Untersuchungen über die Uebergangspunkte der Stärke des Wachsens irgend eines Grades können zurück-

geführt werden auf die Untersuchung über den Uebergang aus dem Wachsen ins Abnehmen oder den umgekehrten Uebergang, indem eine Function oder irgend welche ihrer Differentialquotienten aus dem Wachsen ins Abnehmen oder umgekehrt übergehen müssen, sobald ein Uebergang aus einer Art des Wachsens in die andere stattfinden soll. Geht eine Function aus dem Wachsen ins Abnehmen über, so erreicht sie einen relativ größten Werth, und geht sie aus dem Abnehmen ins Wachsen über, so erlangt sie einen relativ kleinsten Werth. Mithin bildet die Lehre von der Aufsuchung der größten und kleinsten Werthe der Functionen zugleich die Grundlage der Lehre von den Uebergängen der Arten des Wachsens. Es ist zwar in dem ersten Theile dieses Lehrbuchs in den Paragraphen 93 und 94 schon von den größten und kleinsten Werthen der Functionen die Rede gewesen. Aber es handelte sich dort nur um eine vorläufige kurze Nachweisung des Gebrauchs der Differentialrechnung zur Auflösung solcher Aufgaben, und der Wichtigkeit dieser Aufgaben. An diesem Orte erst kann das Verfahren vollständig angegeben werden, durch welches man alle größten und kleinsten Werthe einer Function findet, und durch welches die Entscheidung, ob es größte oder kleinste Werthe sind, am leichtesten herbeigeführt werden kann. Es ist noch zu bemerken, daß man, um den Regeln Kürze und Allgemeingültigkeit zu geben, einen relativ größten negativen Werth einer Function einen kleinsten, und einen relativ kleinsten negativen Werth einen größten nennt.

Eine Function kann aus dem Wachsen ins Abnehmen oder umgekehrt nur übergehen, wenn der Differentialquotient derselben aus positiven Werthen in negative oder umgekehrt übergeht. Der Differentialquotient muß also nothwendig durch Null oder durch das Unendlichgroße hindurchgehen. Da aber der Differentialquotient auch einstimmig durch Null oder das Unendliche gehen kann, und in diesem Falle die Function niemals aus dem Wachsen ins Abneh-

men oder umgekehrt übergeht (siehe Satz 4 und 10 §. 135), so wird es darauf ankommen, erstens zu bestimmen, bei welchen Werthen der willkürlich Veränderlichen der Differentialquotient den Werth Null oder unendlich annimmt, und zweitens zu entscheiden, ob der Differentialquotient einstimmig oder entgegengesetzt durch Null oder das Unendliche geht.

Um zu bestimmen, für welche Werthe der willkürlich Veränderlichen x der Differentialquotient einer Function den Werth Null oder unendlich annimmt, hat man nur den als Function von x gegebenen Differentialquotienten gleich Null und gleich unendlich zu setzen, und diese beiden Gleichungen in Bezug auf x als Unbekannte aufzulösen, und sämmtliche Werthe von x, welche den beiden Gleichungen Genüge thun, aufzustellen.

Um nun aber weiter zu entscheiden, ob der Differentialquotient bei den gefundenen Werthen von x einstimmig oder entgegengesetzt durch Null oder das Unendliche geht, so hat man die beiden Fälle des Durchganges zu trennen. Da bei dem Durchgange des Differentialquotienten durch das Unendliche alle folgenden Differentialquotienten unendlich werden, so gibt es nur ein directes Mittel, zu entscheiden, ob der Differentialquotient einstimmig oder entgegengesetzt durch das Unendliche geht; nämlich man muß die Werthe des Differentialquotienten vor und nach dem Durchgange durch das Unendliche betrachten, und kann dabei entweder aus der Natur der Function unmittelbar beurtheilen, ob ein Zeichenwechsel eintritt oder nicht, oder kann durch wirkliche Berechnung zweier, dem Durchgangspunkte gehörig benachbarter Werthe zur Entscheidung gelangen. Sollte irgend ein anderer Differentialquotient zu der Untersuchung, ob er einstimmig oder entgegengesetzt durch das Unendliche geht, bequemer sein, so kann dieser genommen werden. Denn ist der zur Untersuchung gewählte Differentialquotient von ungerader Rangzahl, so verhält er sich in Bezug auf Einstimmigkeit oder Entgegen-

setzung bei seinem Durchgange durch das Unendliche gerade so wie der erste Differentialquotient; und ist er von gerader Rangzahl, so hat er in der angegebenen Beziehung ein entgegengesetztes Verhalten als der erste Differentialquotient. Je nachdem der erste Differentialquotient aus positiven in negative Werthe oder aus negativen in positive durch das Unendliche übergeht, hat die Function ein Maximum oder Minimum bei diesem Uebergange.

Beim Durchgange des ersten Differentialquotienten durch Null kann zwar die Entscheidung, ob er einstimmig oder entgegengesetzt durch Null geht, wenn sie nicht schon unmittelbar aus der Natur der Function folgt, natürlich auch dadurch herbeigeführt werden, daß man zwei vor und nach dem Durchgangspunkte fallende und diesem Punkte gehörig benachbarte Werthe des ersten Differentialquotienten wirklich berechnet; aber in der Regel bieten die folgenden Differentialquotienten ein leichteres und bequemeres Mittel der Entscheidung dar. Hat nämlich der zweite Differentialquotient einen endlichen von Null verschiedenen Werth, oder ist überhaupt derjenige Differentialquotient, welcher zuerst einen solchen Werth hat, von gerader Rangzahl, so geht (nach Satz 11 §. 135) der erste Differentialquotient entgegengesetzt durch Null. Ist aber derjenige der successiven Differentialquotienten, welcher zuerst einen endlichen von Null verschiedenen Werth annimmt, von ungerader Rangzahl, so geht (nach Satz 11 §. 135) der erste Differentialquotient einstimmig durch Null. Ist ferner der zweite Differentialquotient oder derjenige der successiven Differentialquotienten von gerader Rangzahl, welcher zuerst einen von Null verschiedenen Werth annimmt, negativ, so geht (nach Satz 14 §. 135) der erste Differentialquotient aus positiven in negative Werthe über, und folglich geht die zugehörige Function aus dem Wachsen ins Abnehmen über, und durchläuft einen größten Werth. Ist endlich der zweite Differentialquotient, oder derjenige von gerader Rangzahl, welcher zuerst einen von Null verschiedenen endlichen Werth

annimmt, positiv, so geht der erste Differentialquotient (nach Satz 14 §. 135) aus negativen Werthen in positive über, und die Function geht aus dem Abnehmen ins Wachsen über, und durchläuft einen kleinsten Werth.

Da wir früher (§. 94) schon angewandte Aufgaben aus der Lehre von den größten und kleinsten Werthen der Functionen gelöst haben, so wollen wir hier nur noch einige Functionen, die ohne Beziehung zu bestimmten Aufgaben beliebig genommen sind, auf ihre größten oder kleinsten Werthe untersuchen. Es sollen die Werthe von x bestimmt werden, bei welchen die Function $(1-x^2)^{\frac{1}{3}}$ größte und kleinste Werthe annimmt. Der erste Differentialquotient dieser Function ist $\frac{-2x}{3(1-x^2)^{\frac{2}{3}}}$, und der zweite ist $\frac{-(6+2x^2)}{9(1-x^2)^{\frac{5}{3}}}$. Der erste Differentialquotient wird gleich Null, wenn der Zähler 2x gleich Null ist, also für $x=0$, und wird unendlich, wenn der Nenner $3(1-x^2)^{\frac{2}{3}}$ gleich Null wird. Aus der Gleichung $3(1-x^2)^{\frac{2}{3}}=0$, oder $1-x^2=0$ folgt $x=+1$ und $x=-1$. Also können bei den drei Werthen $-1,0$ und $+1$ möglicherweise größte und kleinste Werthe der Function $(1-x^2)^{\frac{1}{3}}$ eintreten. Für $x=0$ hat der zweite Differentialquotient einen endlichen von Null verschiedenen Werth, und folglich geht der erste Differentialquotient entgegengesetzt durch Null, und die Function erreicht einen größten oder kleinsten Werth. Da aber dieser Werth des zweiten Differentialquotienten negativ ist, nämlich $=-\frac{2}{3}$, so ist für $x=0$ der Functionswerth ein Maximum. Für $x=+1$ und $x=-1$ geht die Function $3(1-x^2)^{\frac{2}{3}}$, weil sie ein Quadrat ist, einstimmig durch Null, und folglich geht der erste Differentialquotient einstimmig durch das Unendliche, die Function erreicht also weder einen größten

noch einen kleinsten Werth. Für $x = -1$ geht der erste Differentialquotient mit positiven Werthen durch das Unendliche, und für $x = +1$ mit negativen. Der zweite Differentialquotient wechselt, wie sich von selbst versteht, sein Vorzeichen bei diesen Werthen von x, und geht für $x = -1$ aus positiven Werthen in negative, und für $x = +1$ aus negativen Werthen in positive über. Stellt man die Function $(1-x^2)^{\frac{1}{3}}$ durch Coordinaten einer Linie dar, so erhält man die Linie ebdcf (Fig. 71), bei welcher in a der Nullpunkt, in b der Werth -1 und in c der Werth $+1$ der Abscisse gesetzt ist.

Nehmen wir noch die Function

$$2 + (x^3 - 3x^2 + 2x)^{\frac{2}{3}},$$

und untersuchen dieselbe auf ihre größten oder kleinsten Werthe. Der erste Differentialquotient derselben ist,

$$\frac{2(3x^2 - 6x + 2)}{3(x^3 - 3x^2 + 2x)^{\frac{1}{3}}},$$

und der zweite ist

$$\frac{36(x^3 - 3x^2 + 2x)(x-1) - 2(3x^2 - 6x + 2)^2}{9(x^3 - 3x^2 + 2x)^{\frac{4}{3}}}.$$

Der erste Differentialquotient wird Null, wenn der Zähler $2(3x^2 - 6x + 2)$ gleich Null ist. Aus der Gleichung

$$3x^2 - 6x + 2 = 0$$

folgt $x = 1 + \sqrt{\frac{1}{3}}$ und $x = 1 - \sqrt{\frac{1}{3}}$. Der erste Differentialquotient wird ferner unendlich groß, wenn der Nenner $3(x^3 - 3x^2 + 2x)^{\frac{1}{3}}$ gleich Null ist. Aus der Gleichung

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$

folgt zunächst, daß 0 eine Wurzel der Gleichung ist. Dividiren wir, um die übrigen Wurzeln zu finden, die Gleichung durch x, so erhalten wir aus der Gleichung

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$x=2$ und $x=1$. Also für die Werthe $1+\sqrt{\frac{1}{3}}$ und $1-\sqrt{\frac{1}{3}}$ der willkürlich Veränderlichen wird der erste Differentialquotient gleich Null, und für die Werthe 0, 1, 2 derselben wird er unendlich groß. Um zu entscheiden, ob der erste Differentialquotient bei den Werthen $1+\sqrt{\frac{1}{3}}$ und $1-\sqrt{\frac{1}{3}}$ einstimmig oder entgegengesetzt durch Null geht, betrachten wir den Werth, welchen der zweite Differentialquotient bei diesen Werthen von x annimmt. Der Zähler des zweiten Differentialquotienten wird gleich -8 sowol für $x=1+\sqrt{\frac{1}{3}}$ als für $x=1-\sqrt{\frac{1}{3}}$. Und da der Nenner des zweiten Differentialquotienten für alle Werthe von x nothwendig positiv ist, und mithin der zweite Differentialquotient einen endlichen negativen Werth hat, so durchläuft die Function an den entsprechenden Stellen zwei größte Werthe. Indem der Nenner des ersten Differentialquotienten bei den Werthen 0, 1, 2 der willkürlich Veränderlichen durch Null geht, wechselt die Function x^3-3x^2+2x offenbar ihr Vorzeichen, und folglich auch die dritte Wurzel derselben, oder die Function $(x^3-3x^2+2x)^{\frac{1}{3}}$. Und da bei denselben drei Werthen der willkürlich Veränderlichen der Zähler sein Vorzeichen nicht wechselt, so geht der erste Differentialquotient bei diesen Werthen entgegengesetzt durch das Unendliche, und folglich die Function aus dem Wachsen ins Abnehmen oder umgekehrt über. Für $x=0$ ist der Zähler des ersten Differentialquotienten positiv, und der Nenner desselben geht aus negativen Werthen in positive über; folglich geht der erste Differentialquotient aus negativen Werthen in positive über, und die Function durchläuft ein Minimum. Für $x=1$ ist der Zähler des ersten Differentialquotienten negativ, der Nenner geht aus positi-

ven Werthen in negative über, und folglich der erste Differentialquotient aus negativen Werthen in positive, und die Function durchläuft ebenfalls ein Minimum. Für $x=2$ ist der Zähler positiv, der Nenner geht aus negativen Werthen in positive über, und folglich hat der erste Differentialquotient denselben Uebergang, und die Function erreicht zum dritten Mal ein Minimum. Setzen wir in b (Fig. 72) den Nullpunkt der Abscisse, $bc=1$ und $bd=2$, so stellen die Ordinaten der Linie fghiklm die Function $2+(x^3-3x^2+2x)^{\frac{2}{3}}$ dar, deren Differentialquotient zweimal Null und dreimal unendlich wird, und welche an den entsprechenden Punkten zwei Maxima und drei Minima enthält.

Um die Werthe der willkürlich Veränderlichen zu finden, für welche die Stärke des Wachsens, oder die Beschleunigung des Wachsens oder überhaupt die Stärke des Wachsens irgend eines Grades größte oder kleinste Werthe durchläuft, wird man den ersten Differentialquotienten oder den zweiten oder überhaupt einen beliebigen als die ursprünglich gegebene Function betrachten, welche man ganz auf die schon beschriebene Weise in Bezug auf ihre größten und keinsten Werthe untersucht. Nehmen wir z. B. die Function $\sin x$. Wir wollen dieselbe gleich durch die Ordinaten einer Linie darstellen. Die Ordinaten der gemeinen Wellenlinie agchei (Fig. 73) repräsentiren die Function $\sin x$, wobei in a der Nullpunkt der Abscisse, und $ab=\frac{\pi}{2}$, $ac=\pi$, $ad=\frac{3\pi}{2}$ u. s. w. gesetzt ist. Um zuerst die größten und kleinsten Werthe der gegebenen Function selbst zu finden, setzen wir den ersten Differentialquotienten von $\sin x$, nämlich $\cos x$, da er den Werth unendlich nicht annehmen kann, blos gleich Null. Aus der Gleichung $\cos x=0$ folgen unzählig viele Werthe von x, welche der Gleichung

genügen, nämlich $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{2}$ u. s. w. Der zweite Differentialquotient von $\sin x$ ist $-\sin x$. Da derselbe bei allen Werthen von x, für welche $\cos x$ gleich Null ist, einen von Null verschiedenen endlichen Werth hat, so geht der erste Differentialquotient an allen betreffenden Punkten entgegengesetzt durch Null, und die Function $\sin x$ hat größte und kleinste Werthe. Für die Werthe $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{9\pi}{2}$ u. s. w. ist die Function $-\sin x$ negativ, und folglich hat die Function $\sin x$ bei diesen Werthen Maxima. Und da für die Werthe π, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{2}$ u. s. w. der zweite Differentialquotient positiv ist, so hat die Function an den betreffenden Stellen Minima.

Untersuchen wir den ersten Differentialquotienten $\cos x$ in Bezug auf seine Maxima und Minima. Der erste Differentialquotient von $\cos x$, nämlich $-\sin x$, wird gleich Null, wenn x die Werthe, 0, π, 2π, 3π u. s. w. hat. Der zweite Differentialquotient von $\cos x$, nämlich $-\cos x$, ist bei den Werthen 0, 2π, 4π u. s. w. gleich $+1$, und bei den Werthen π, 3π, 5π u. s. w. gleich -1. Folglich hat die Function $\cos x$, oder die Stärke des Wachsens der Function $\sin x$, ihre größten Werthe in den Punkten a, e u. s. w. der Figur, und ihre kleinsten in den Punkten c, k u. s. w. Um zu bestimmen, an welchen Stellen die Beschleunigung des Wachsens der Function $\sin x$, oder die Function $-\sin x$ ihre größten und kleinsten Werthe hat, setzen wir $-\cos x = 0$. Von den Werthen $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$ u. s. w., welche dieser Gleichung genügen, machen die Werthe $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{9\pi}{2}$ u. s. w. den zweiten Differentialquotienten von $-\cos x$, nämlich $\sin x$, positiv, und die Werthe $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{2}$ u. s. w. machen

denselben negativ. Folglich hat die Beschleunigung des Wachsens der Function sin x bei den ersteren Werthen ihre Minima, und bei den letzteren ihre Maxima.

Die Lehren von den größten und kleinsten Werthen der Functionen sind die wichtigsten aber bei Weitem nicht die einzigen Anwendungen, welche von der Lehre über die in den verschiedenen Graden des Wachsens eintretenden Uebergangspunkte gemacht werden. So wie man in der Curvenlehre gemeine Curvenpunkte von besonderen oder ausgezeichneten Curvenpunkten unterscheidet, und unter den letzteren solche versteht, in welchen irgend ein Differentialquotient der Coordinaten einen Uebergangspunkt oder einen Zeichenwechsel hat, so kann man auch, abgesehen von räumlichen Repräsentanten der Functionen, gemeine Functionswerthe und ausgezeichnete oder besondere Functionswerthe unterscheiden, und die Ableitung der Eigenschaften der Letzteren auf die Lehre von den Uebergangspunkten der Stärke des Wachsens der verschiedenen Grade gründen. So z. B. läßt sich leicht der für die Berührungen der Functionen und für die nach Anleitung des vorhergehenden Capitels zu bewerkstelligende Berechnung einer Function durch eine Berührende wichtige Satz ableiten, daß von solchen Functionen, welche sich in irgend einem Grade von ungerader Rangzahl berühren, die Eine vor und nach dem Berührungspunkte größere Werthe haben muß als die Andere, sobald derjenige Differentialquotient, welcher um einen Grad höher ist als der Berührungsgrad, sein Vorzeichen im Berührungspunkte nicht wechselt, und daß von solchen Functionen, welche sich in irgend einem Grade von gerader Rangzahl berühren, die Eine vor dem Berührungspunkte größere und nach demselben kleinere Werthe haben muß als die Andere, sobald der den Berührungsgrad um eine Einheit übersteigende Differentialquotient im Berührungspunkte sein Zeichen nicht wechselt. In Bezug auf Linien wird dieser Unterschied des Zusammentreffens der sich berührenden Linien sich so darstellen, daß entweder die eine Linie auf derselben

Seite der berührten bleibt, oder daß beide Linien sich kreuzen, und sobald der Berührungspunkt in Bezug auf den den Berührungsgrad um eine Einheit übersteigenden Differentialquotient ein gemeiner Curvenpunkt ist für beide Linien, wird in Bezug auf das Sichkreuzen oder Nichtkreuzen der Linien eine feste Regel gelten bei jedem Berührungsgrade, welche aus dem Obigen sich leicht ableiten läßt, und welche in die entgegengesetzte übergeht, sobald der genannte Differentialquotient in Einer von beiden Linien sein Zeichen wechselt.

Wir wollen mit Verzichtleistung auf die ausführlichere Lehre von den Uebergangspunkten der Stärke des Wachsens beliebiger Grade die allgemeine Lehre von den höheren Differentialquotienten der Functionen Einer Veränderlichen hiermit als geschlossen betrachten. Von der Fruchtbarkeit und den außerordentlichen Erfolgen der Analyse des in allen seinen inneren Momenten verfolgten Begriffs einer Stärke des Wachsens hier zu reden ist überflüssig, da das Vorhergehende schon hinreichende Belege dazu liefert, und auch an verschiedenen Stellen schon auf die Bedeutung derselben hingewiesen worden ist. Es mögen nun noch einige Anwendungen folgen. Und da alle directen Anwendungen der Differential- und Integralrechnung auf das Stetige, auf den Raum und die Verbindung von Raum und Zeit, d. h. auf Geometrie und Bewegungslehre sich beziehen, so soll in den beiden folgenden Capiteln noch ein umfassendes geometrisches und ein größeres mechanisches Problem abgehandelt werden.

Zwölftes Capitel.

Von der Krümmungsstärke der krummen Linien.

§. 137.

Unter den Eigenschaften der krummen Linien, welche man durch Hülfe der Differential- und Integralrechnung entwickelt, und deren Erörterung man als lehrreiches Beispiel des Nutzens und Erfolges dieser Rechnung gebrauchen kann, nimmt die Krümmungsstärke einen vorzüglichen Rang ein, weil sich diese Eigenschaft durch die sonstigen Hülfsmittel der Mathematik nur sehr mangelhaft und schwerfällig und in einzelnen leichteren Fällen behandeln läßt, durch die Differential- und Integralrechnung aber auf eine leichte umfassende Art entwickelt wird. Es gibt zwei ursprüngliche verschiedene Bewegungen, durch welche man sich alle Raumgrößen erzeugt denken kann, die fortschreitende Bewegung und die drehende Bewegung. Eine gerade Linie wird erzeugt durch eine blos fortschreitende Bewegung eines Punktes ohne alle Richtungsveränderung oder Drehung. Setzt man gerade Linien zu einer Figur zusammen, und durchläuft den Umfang dieser Figur, so fallen die fortschreitende Bewegung und die drehende Bewegung noch ganz auseinander, weil man abwechselnd bald eine blos fortschreitende Bewegung, bald eine blos drehende an den Ecken der Figur, vornimmt. Das Wesen der krummen Linie besteht darin, daß diese beiden entgegengesetzten Bewegungsarten ineinander fließen und continuirlich verbunden sind, so daß kein noch so kleiner Fortschritt auf der Länge der Linie ohne Drehung, und keine noch so kleine Drehung ohne Fortschritt statt-

Begriff und Maß der Krümmungsstärke.

finden kann. Die Krümmung selbst, in sofern sie eine verschiedene ist in verschiedenen krummen Linien oder in den Theilen einer und derselben Linie, wird auf dem Verhältniß beruhen, welches diese beiden Arten der Bewegung haben.

Da die momentane Richtung, welche eine krumme Linie in einem Punkte hat, angegeben wird durch die Tangente dieses Punktes, so wird der Richtungsunterschied oder die Drehungsgröße, welche man von einem Curvenpunkte zu einem andern fortschreitend durchlaufen hat, angegeben werden durch den Winkel, welchen die beiden Tangenten dieser Curvenpunkte miteinander bilden. Ist bei einem gewissen Fortschritte auf der Länge der krummen Linie, wie bei dem Fortschritte von c nach d (Fig. 74), die Drehung oder der Winkel egd, welchen die Tangenten der Punkte c und d bilden, geringer, als der Winkel, welchen bei einem ebenso großen Fortschritte von a nach b die Tangenten dieser Punkte bilden, so wird im Allgemeinen die Krümmung der Curve in der Gegend des Stückes cd geringer sein als in der Gegend des Stückes ab. Aber diese Vorstellungen sind offenbar noch viel zu unbestimmt, um darauf den Begriff eines Maßes für die Krümmung oder einer bestimmten Krümmungsstärke zu gründen. Da im Allgemeinen bei den krummen Linien mit gleichen Zunahmen der Länge derselben ungleiche Zunahmen der Drehung, welche man zu machen hat, um aus einer gewissen beliebigen Anfangsrichtung in die Lage der Tangenten zu kommen, verbunden sind, so wird man hier, wie überall bei ungleichmäßig wachsenden Größen, eine bestimmte Vorstellung von der Stärke des Wachsens derselben sich nur bilden können, wenn man zuerst den Fall betrachtet, in welchem die veränderlichen Größen gleichmäßig wachsend sind.

Es ist aus den Elementen der Geometrie bekannt, daß diejenige krumme Linie, in welcher mit gleichen Fortschritten auf der Länge der Curve gleiche Drehungen der Tangenten verbunden sind, die Kreislinie ist, und daß der Kreislinie allein diese Eigenschaft zukommt. Die Kreislinie

allein hat demnach eine constante Krümmungsstärke. Betrachten wir eine beliebige Richtung ab (Fig. 75) als die Anfangsrichtung, und nennen wir den veränderlichen Winkel, welchen die Tangenten des Kreises mit derselben bilden, W, und die veränderliche Curvenlänge L, so ist der Differenzquotient dieser Veränderlichen beim Kreise constant, und es ist durch die Gleichung $\frac{\varDelta W}{\varDelta L} = a$ eine charakteristische Eigenschaft des Kreises ausgesprochen. Da man die Krümmung um so stärker nennt, je größer die Zunahme von W ist bei derselben Zunahme von L, so kann der Zahlenwerth dieses Differenzquotienten unmittelbar als Maß der Krümmung dienen. Es fragt sich nur noch, durch welche bestimmte Zahl dieser Differenzquotient bei einem Kreise von bestimmter Größe auszudrücken ist. Hierzu ist nöthig, daß man die Drehung durch eine Zahl ausdrückt. Wir legen der ganzen Umdrehung den Zahlenwerth 2π bei. Um nun bei einem Kreise, dessen Radius den Zahlenwerth r hat, den Zahlenwerth von $\frac{\varDelta W}{\varDelta L}$ zu finden, verfahren wir wie bei allen gleichmäßig Wachsenden am einfachsten so, daß wir der willkürlich Veränderlichen L eine Zunahme gleich 1 ertheilen; alsdann ist die zugehörige Zunahme der abhängig Veränderlichen ohne Weiteres dem constanten Differenzquotienten gleich. Hat der Bogen ed (Fig. 75) bei dem angenommenen Zahlenwerth des Radius den Zahlenwerth 1, so wird, da ed zu der Länge des ganzen Kreises, d. h. zu $2r\pi$ sich verhält wie der Zahlenwerth des Winkels ecd zu der Zahl 2π, aus der Proportion $1:2r\pi = ecd:2\pi$ folgen $ecd = \frac{1}{r}$. Und da der Winkel fgd dem Centriwinkel ecd gleich ist, und der Zahlenwerth des Winkels fgd dem constanten Differenzquotienten von W und L gleich sein muß, so erhält man die Gleichung

$$\frac{\varDelta W}{\varDelta L} = \frac{1}{r}.$$

Wir sehen hieraus, daß die Krümmungsstärken verschiedener Kreise sich umgekehrt wie ihre Radien verhalten, und daß, wenn die Krümmungsstärke durch die Zahl 1 ausgedrückt erscheint, wir darunter zu verstehen haben die Krümmung eines Kreises, dessen Radius den Zahlenwerth 1 hat. Ueberhaupt ist klar, wie man den beliebigen Zahlenwerth, welcher gleich $\frac{\Delta W}{\Delta L}$ gefunden wird, auf einen Kreis zu beziehen hat. Denn aus der Gleichung $\frac{dW}{dL} = \frac{1}{r}$ folgt $r = \frac{1}{\frac{dW}{dL}}$, d. h. die durch den Zahlenwerth von $\frac{\Delta W}{\Delta L}$ ausgedrückte Krümmungsstärke ist identisch mit der eines Kreises, dessen Radius gleich $\frac{1}{\frac{\Delta W}{\Delta L}}$ ist.

§. 138.

Die momentane Krümmungsstärke eines Curvenpunktes bei Parallelordinaten.

In allen krummen Linien, die nicht Kreise sind, werden mit gleichen, auch beliebig kleinen Zunahmen der Curvenlänge ungleiche Zunahmen des Winkels, welchen die Tangenten mit einer Anfangsrichtung machen, verbunden sein, oder die Größen L und W, in der vorher erklärten Bedeutung genommen, werden ungleichmäßig wachsend sein. Die Krümmungsstärke wird also stetig veränderlich sein, und es kann nicht die Rede sein von der in einem gewissen Curvenstück vorhandenen Krümmung, sondern nur von der in einem Punkte vorhandenen. Die von einem gewissen Curvenpunkte genommene Zunahme von L verglichen mit der zugehörigen Zunahme von W kann aber kein Maß für die in diesem Curvenpunkte vorhandene Krümmungsstärke abgeben, weil das Verhältniß beider Zunahmen zufällig und veränderlich ist, wenn man eine andere Zunahme von L setzt. Da jedoch die Krümmung stetig veränderlich ist,

so wird der Werth von $\frac{\Delta W}{\Delta L}$ die in einem Curvenpunkte vorhandene Krümmung um so genauer angeben, je kleiner die von diesem Punkte aus genommene Zunahme von L ist, und der Zahlenwerth, dem sich der Werth von $\frac{\Delta W}{\Delta L}$ mit Verkleinerung des ΔL ohne Ende nähert, d. h. der Zahlenwerth von $\frac{dW}{dL}$ wird die in einem Curvenpunkte vorhandene Krümmung genau angeben, in demselben Sinne, in welchem dem Obigen zu Folge eine Zahl eine Krümmungsstärke ausdrückt. Wird nämlich für einen bestimmten Curvenpunkt der Werth des Differentialquotienten $\frac{dW}{dL}$ gleich a gefunden, so heißt das, die Krümmungsstärke in diesem Curvenpunkte ist so groß als die eines Kreises, dessen Radius gleich $\frac{1}{a}$ ist.

Wenn man bei einer Curve die Veränderliche W durch eine Function der Veränderlichen L ausdrückte, indem man diese Größen als die Veränderlichen eines eigenthümlichen Coordinatensystems nähme, so brauchte man nur den Differentialquotienten der gegebenen Function von L zu nehmen, um in demselben ohne Weiteres die momentane Krümmungsstärke der Curve als Function von L zu haben*). In sofern man aber das Coordinatensystem, durch welches eine Curve gegeben ist, nicht verändern will, und also den Werth von $\frac{dW}{dL}$ durch eine Function der dem Coordinatensysteme zu Grunde liegenden willkürlich Veränderlichen ausdrücken will, muß man einen kleinen Umweg einschlagen. Heißt nämlich die willkürlich Veränderliche

*) Anleitung dazu, die Veränderliche W als Function von L darzustellen bei jeder Curve, findet man in der „Neuen Curvenlehre von Adolf Peters. Dresden 1835."

eines Coordinatensystemes x, und stellen wir sowol den Differentialquotienten von L und x als den von W und x als Functionen von x dar, so folgt aus den beiden Gleichungen

$$\frac{dL}{dx} = f(x) \text{ und } \frac{dW}{dx} = \varphi(x)$$

wenn wir die zweite durch die erste dividiren

$$\frac{dW}{dL} = \frac{\varphi(x)}{f(x)}$$

und damit haben wir den Differentialquotienten von W und L als Function der Veränderlichen x.

Wir wollen zuerst den Ausdruck für die Krümmungsstärke bei dem Parallelcoordinatensystem aufsuchen, und zwar bei senkrechten Parallelordinaten. Nehmen wir eine beliebige Curve fde (Fig. 76), ihre Abscisse heiße x, und ihre Ordinate f(x). Durch welche Function von x der Differentialquotient der Curvenlänge und der Abscisse darzustellen ist, wissen wir schon aus §. 53. Es ist dort gefunden

$$\frac{dL}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2}.$$

Um auch den Differentialquotienten von W und x zu erhalten, müssen wir zuerst W selbst als eine Function von x darstellen. Da unter W verstanden wird die Drehung, welche man vornehmen muß, um aus einer gewissen Anfangsrichtung in die Richtung der Tangente eines Curvenpunktes überzugehen, so müssen wir erst festsetzen, welche Richtung als Anfangsrichtung gelten soll, und nach welcher Seite die unter W verstandene Drehung stattfinden soll. Als Anfangsrichtung wird am bequemsten die Abscisse genommen, und zwar der vom Nullpunkte aus genommene positive Zweig derselben. Bei der Drehung unterscheidet man die Drehung nach rechts und nach links. Wenn eine Linie so umgedreht wird, wie der Zeiger einer Uhr läuft, so sagt man, sie wird rechts gedreht. Im entgegengesetzten Falle heißt sie links gedreht. Wir wollen

unter W eine aus der Anfangsrichtung nach links vorgenommene Drehung verstehen, und in sofern wir die Drehungen als positive und negative unterscheiden, ist demnach die Drehung nach links als die positive zu betrachten. Gemäß diesen Erklärungen ist der Winkel ebc (Fig. 76) der Werth von W für den Curvenpunkt e. Die trigonometrische Tangente dieses Winkels ist gleich dem Differentialquotienten der Coordinaten der Curve für den Punkt e genommen, oder allgemein für jeden Curvenpunkt gleich $\frac{df(x)}{dx}$. Der Zahlenwerth des Winkels ebc ist also, in sofern die ganze Umdrehung wie angenommen durch 2π ausgedrückt wird, gleich dem Bogen, dessen trigonometrische Tangente gleich $\frac{df(x)}{dx}$ ist. Wir erhalten demnach zunächst W als Function von x durch die Gleichung

$$W = \text{Arc}\left(\text{tg} = \frac{df(x)}{dx}\right).$$

Um $\frac{dW}{dx}$ zu finden, brauchen wir nur die in §. 90, 3. aufgestellte Gleichung

$$\frac{d\,\text{Arc}(\text{tg}=x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

anzuwenden. Setzen wir statt der Veränderlichen x die Veränderliche $\frac{df(x)}{dx}$, so erhalten wir

$$\frac{d\,\text{Arc}\left(\text{tg} = \frac{df(x)}{dx}\right)}{d\,\frac{df(x)}{dx}} = \frac{1}{1+\left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2}.$$

Hier haben wir zunächst den Differentialquotienten der Function $\text{Arc}\left(\text{tg} = \frac{df(x)}{dx}\right)$ in Bezug auf $\frac{df(x)}{dx}$ als willkürlich Veränderliche. Um denselben aber in Bezug auf x als willkürlich Veränderliche zu haben, brauchen wir nur

statt $d\left(\frac{df(x)}{dx}\right)$ zu setzen $\frac{d\left(\frac{df(x)}{dx}\right)}{dx}.dx$ oder $\frac{d^2f(x)}{dx^2}.dx$, und indem wir die Gleichung mit $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ multipliciren, erhalten wir

$$\frac{d\,Arc\left(tg = \frac{df(x)}{dx}\right)}{dx} = \frac{\frac{d^2f(x)}{dx^2}}{1+\left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2} \text{ oder}$$

$$\frac{dW}{dx} = \frac{\frac{d^2f(x)}{dx^2}}{1+\left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2}.$$

Dividiren wir endlich, wie oben vorgeschrieben, $\frac{dW}{dx}$ durch $\frac{dL}{dx}$, so erhalten wir

$$\frac{dW}{dL} = \frac{\frac{d^2f(x)}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

und damit die Krümmungsstärke eines beliebigen Curvenpunktes als Function des zugehörigen Abscissenwerthes.

Der Ausdruck für die Krümmungsstärke wird positiv sein, wenn mit der Zunahme von L und folglich auch mit der Zunahme von x eine Zunahme von W verbunden ist, und negativ, wenn mit der Zunahme von x eine Abnahme von W verbunden ist. Nun wird aber bei einer Linie, die in Bezug auf die angenommenen Coordinaten convex zu nennen ist (in dem früher festgestellten Sinne) mit wachsendem x die Größe W immer größer, sowol in demjenigen Theile der convexen Linie, in welchem die Ordinaten beschleunigt wachsen, wie in dem Theile de (Fig. 76), als in demjenigen Theile, in welchem die Ordinaten retardirt abnehmen, wie in dem Theile fd (Fig. 76), weil in dem

letzteren Theile der Winkel fgh, den man durch eine aus der Abscissenrichtung nach rechts vorgenommene Drehung erzeugt zu denken und also negativ zu betrachten hat, mit wachsendem x immer kleiner wird, oder weil der Winkel fgc, den man durch eine aus der Abscissenrichtung nach links vorgenommene Drehung erzeugt zu denken und also positiv zu setzen hat, mit wachsendem x immer größer wird. Der positive Werth der Krümmungsstärke deutet also auf eine convexe Linie, oder bezieht sich, wenn eine Curve für dieselben Werthe der Abscisse einen convexen und einen concaven Zweig hat, auf den convexen Zweig. Bei einer concaven Linie wird mit einer Zunahme des x und folglich auch mit einer Zunahme des L eine Abnahme des W verbunden sein, und folglich der Werth von $\frac{dW}{dL}$ negativ ausfallen. Man konnte dies auch unmittelbar aus der Formel

$$\frac{\frac{d^2 f(x)}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

ableiten. Denn der Nenner ist nothwendig immer positiv, und der ganze Ausdruck wird also positiv oder negativ sein, je nachdem der Zähler $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ positiv oder negativ ist. Nun ist aber bekanntlich der zweite Differentialquotient der Ordinaten positiv bei den convexen und negativ bei den concaven Theilen einer krummen Linie.

§. 139.

Beispiele zur Berechnung der Krümmungsstärke.

Die Linie bac Fig. 77 sei gebildet nach der Coordinatengleichung $y = x^2$. Dieselbe ist also eine gemeine Parabel, deren Parameter gleich 1 ist. Der erste Differentialquotient der Ordinaten ist gleich 2x und der zweite gleich 2. Nach unserer allgemeinen Formel für die

Krümmungsstärke oder für $\frac{dW}{dL}$ ist also bei dieser Parabel

$$\frac{dW}{dL} = \frac{2}{[1+4x^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Im Punkte a der Curve, wo $x=0$ ist, hat die Krümmungsstärke den Werth 2, oder ist gleich der Krümmung eines Kreises, dessen Radius gleich $\frac{1}{2}$ oder gleich dem halben Parameter ist. Der Kreis, dessen constante Krümmung gleich ist der momentanen eines Curvenpunktes, heißt der Krümmungskreis dieses Punktes. Durch den Krümmungskreis wird die momentane Krümmungsstärke eines Curvenpunktes versinnlicht, weil in demselben diejenige Stärke des Wachsens der Größen W und L, welche in dem Curvenpunkte momentan vorhanden ist, constant ist und zur Ausführung kommt. Soll der Krümmungskreis an den betreffenden Curvenpunkt so angebracht werden, daß man ihn als die geometrische Construction des Differentialquotienten $\frac{dW}{dL}$ betrachten kann in dem früher erklärten Sinne der Construction eines Differentialquotienten veränderlicher Raumgrößen, so ist, wie in dem folgenden Paragraphen noch bewiesen werden soll, nur nöthig, den Kreis so durch den betreffenden Curvenpunkt gehen zu lassen, daß beide krumme Linien in diesem Punkte eine gemeinschaftliche Tangente haben. Dadurch ist die Lage des Radius des Krümmungskreises vorgeschrieben. Und da die Länge des Radius durch $\frac{dW}{dL}$ gegeben ist, so ist die geometrische Construction der momentanen Krümmungsstärke sehr leicht auszuführen. Um also die im Punkte a unserer Parabel vorhandene Krümmungsstärke zu construiren, errichten wir auf der Tangente des Punktes a eine Senkrechte ag von der Länge $\frac{1}{2}$, und beschreiben mit derselben

als Radius einen Kreis. Im Curvenpunkte h, wo $x=1$ ist, nimmt der Ausdruck $\frac{2}{[1+4x^2]^{\frac{3}{2}}}$ der Krümmungsstärke unserer Parabel den Werth $\frac{2}{5^{\frac{3}{2}}}$ oder $\frac{2}{5\sqrt{5}}$ an. Ziehen wir auf die Tangente hi eine Senkrechte von der Länge $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ oder 5,590, so enthält der damit beschriebene Kreis khl die geometrische Construction der Krümmungsstärke des Punktes h.

Betrachten wir noch die Krümmungsstärken in einer Ellipse. Die halbe kleine Achse ac der Ellipse Fig. 78 sei $=3$, und die halbe große Achse $ce=5$. Alsdann ist die Mittelpunktsgleichung der Ellipse $y=\pm\frac{3}{5}[5^2-x^2]^{\frac{1}{2}}$. Daraus ergibt sich $\frac{dy}{dx}=\mp\frac{3x}{5(5^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ $=\mp\frac{15}{(5^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Der negative Werth dieser Differentialquotienten gilt für die positiven Ordinaten, und der positive für die negativen Ordinaten. Nach der allgemeinen Formel für $\frac{dW}{dL}$ haben wir bei unserer Ellipse

$$\frac{dW}{dL}=\mp\frac{\frac{15}{(5^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}}{\left[1+\frac{9x^2}{25(5^2-x^2)}\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Nach gehöriger Zusammenziehung dieses Ausdrucks erhalten wir

$$\frac{dW}{dL}=\mp\frac{15.125}{(625-16x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Der negative Werth der Krümmung bezieht sich auf den durch die positiven Ordinaten gegebenen Curvenzweig, und der positive auf den andern. Im Punkte a der Ellipse oder für $x=0$ ist die Krümmung gleich $-\frac{3}{25}$, und der mit dem Radius $\frac{25}{3}$ beschriebene Kreis fag gibt die Krümmungsstärke des Punktes a an. Im Punkte d oder e, wo x gleich -5 oder $+5$ ist, erhält die Krümmung den Werth $\frac{5}{9}$, und zwar nach Belieben $+\frac{5}{9}$, oder $-\frac{5}{9}$, weil in den Punkten d und e die convexen und concaven Curvenzweige zusammenstoßen. Der mit dem Radius $\frac{9}{5}$ beschriebene Kreis dh gibt die Construction der Krümmung des Punktes d. Im Punkte i der Curve, wo $x=4$ ist, hat die Krümmung den Werth $-\frac{15.125}{369^{\frac{3}{2}}}$ oder $-0{,}2645\ldots$ Der Radius des Krümmungskreises min ist also gleich $3{,}780\ldots$ zu nehmen.

An den Stellen der Curve, bei welchen die Tangente senkrecht auf der Abscisse steht, und also der erste und zweite Differentialquotient der Ordinaten unendlich groß sind, wie bei den Punkten d und e der Ellipse, wird in der Regel der Ausdruck für die Krümmungsstärke unbestimmt werden, weil Zähler und Nenner desselben zugleich unendlich groß werden, wie auch der obige Ausdruck der Krümmung der Ellipse in der ersten unzusammengezogenen Form für $x=5$ in den unbestimmten Ausdruck $\frac{\infty}{\infty}$ übergeht, und in der zweiten Form nur deswegen einen bestimmten Werth gibt, weil der Bestandtheil (5^2-x^2), welcher das Unendlichwerden des Zählers und Nenners hervorbringt, bei der Zusammenziehung der Formel durch Aufhebung verschwunden ist. Um an solchen Stellen der Curve

die Krümmungsstärke zu berechnen, kann man entweder den wahren Werth des unbestimmten Ausdrucks nach den gewöhnlichen Regeln berechnen, oder, was meistens einfacher ist, die Coordinatenaxen verwechseln, wodurch die unendlichen Werthe der Differentialquotienten der Curven verschwinden.

Wie man an den vorhergehenden Beispielen gesehen hat, so bleibt der Krümmungskreis bald auf derselben Seite der Curve, bald schneidet er dieselbe. Das Erstere kann offenbar nur eintreten an denjenigen Curvenpunkten, in welchen die Krümmung einen größten oder kleinsten Werth hat. Ist nämlich im Punkte a der Ellipse (Fig. 78) die Krümmung ein Minimum, so wird sie vor und nach dem Punkte a stärker sein, als die Krümmung des Kreises fag, und mithin werden auch, wenn man vom Punkte a aus vor- und rückwärts Zunahmen der Curvenlänge setzt, die Tangenten der Ellipse sich stärker aus der Richtung der gemeinschaftlichen Tangente drehen, als die Tangenten des Kreises bei gleich großen Zunahmen der Curvenlänge. Es wird also die Curve vor und nach dem Berührungspunkte innerhalb des Kreises bleiben. Aus denselben Gründen folgt, daß die Curve zu beiden Seiten des Berührungspunktes außerhalb des Krümmungskreises fallen muß, wenn in dem Berührungspunkte ein Maximum der Krümmung stattfindet. In allen Curvenpunkten aber, in welchen weder ein Maximum noch ein Minimum der Krümmung statthat, muß der Krümmungskreis die Curve schneiden. Denn die Curve hat, in sofern ihre Krümmung im Wachsen oder Abnehmen begriffen ist, entweder vor dem Berührungspunkte eine kleinere Krümmung als der Krümmungskreis und nachher eine größere, oder umgekehrt. Folglich werden die Tangenten der Curve auf der einen Seite des Berührungspunktes sich mehr aus der Richtung der gemeinschaftlichen Tangente entfernen als die Tangenten des Kreises bei gleichen Zunahmen der Curvenlänge, und auf der andern Seite weniger, und folglich muß die

Curve nach der einen Seite innerhalb und nach der andern außerhalb des Kreises liegen.

Betrachten wir noch die Krümmung der Wellenlinie agehe Fig. 73. Die Gleichung derselben ist $y = \sin x$. Der erste Differentialquotient von $\sin x$ ist $\cos x$ und der zweite ist $-\sin x$. Folglich ist.

$$\frac{dW}{dL} = -\frac{\sin x}{[1 + (\cos x)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Im Punkte g, wo $x = \frac{\pi}{2}$ ist, hat die Krümmung den Werth -1, und im Punkte h, wo $x = \frac{3\pi}{2}$, den Werth $+1$. In diesen Punkten sind offenbar Maxima der Krümmung, weil in dem Ausdrucke für die Krümmungsstärke der Zähler seinen größten und der Nenner seinen möglichst kleinsten Werth hat. Im Punkte c, wo $x = \pi$, nimmt der Ausdruck der Krümmung den Werth 0 an. Der Radius des Krümmungskreises ist also an diesem Wendungspunkte unendlich groß, und dieser Kreis geht in eine gerade Linie über. Wo eine krumme Linie einen Wendungspunkt hat, und aus Convexität in Concavität oder umgekehrt übergeht, und mithin der zweite Differentialquotient der Parallelordinaten sein Zeichen wechselt, wird auch der Ausdruck für die Krümmung sein Zeichen wechseln, und folglich entweder durch den Nullwerth oder das Unendliche gehen. In der krummen Linie abc Fig. 79 z. B., welche nach der Gleichung $y = 2 + (1-x)^{\frac{5}{3}}$ gebildet ist, wobei in d der Nullpunkt der Abscisse und de gleich 1 gesetzt ist, wird der zweite Differentialquotient der Ordinaten, nämlich $\frac{10}{9(1-x)^{\frac{1}{3}}}$, unendlich groß für $x = 1$, und geht entgegengesetzt durch das Unendliche. Da der erste Differentialquotient der Ordinaten, nämlich $-\frac{5}{3}(1-x)^{\frac{2}{3}}$, für densel-

den Werth von x gleich Null wird, so ist im Punkte b die Krümmung unendlich groß, und der Radius des Krümmungskreises geht in einen Punkt über. Natürlich kann der zweite Differentialquotient auch einstimmig durch Null oder das Unendliche gehen, und die Krümmung gleich Null oder unendlich groß werden, ohne daß ein Wendungspunkt der Curve vorhanden ist. In der Curve efg Fig. 80, welche nach der Gleichung $y=4-(1-x)^{\frac{4}{3}}$ gebildet ist, wobei in c der Nullpunkt der Abscisse und cb gleich 1 gesetzt ist, und welche die Form eines Spitzbogens darstellt, ist für $x=1$ der erste Differentialquotient der Ordinaten $\frac{4}{3}(1-x)^{\frac{1}{3}}$ gleich Null, und der zweite $-\frac{4}{9(1-x)^{\frac{2}{3}}}$ unendlich groß, geht jedoch einstimmig mit negativen Werthen durch das Unendliche. Die Krümmung ist also in der ganzen Curve negativ, und im Punkte f unendlich groß.

§. 140.

Der Berührungsgrad des Krümmungskreises.

Der Krümmungskreis hat seinem Begriffe nach denselben Differentialquotienten der Veränderlichen W und L, den eine Curve in demjenigen Punkte hat, dessen momentane Krümmungsstärke durch den Krümmungskreis angegeben wird. Es fragt sich nun, ob der Krümmungskreis auch einen oder mehrere Differentialquotienten der Ordinaten mit der Curve, deren momentane Krümmung durch ihn bestimmt wird, gemeinschaftlich hat, d. h. ob er die Curve im ersten oder in einem höheren Grade berührt. Um diese Frage zu beantworten, müssen wir zuerst die allgemeine Gleichung des Kreises aufstellen. Wir setzen einen gegen den Kreis ganz beliebig gelegten Anfangspunkt der rechtwinkligen Coordinatenaxen. Es sei cb Fig. 81 die Abscisse, und c ihr Nullpunkt. Die Abscisse des Mittelpunktes des Kreises cd heiße a, und die Ordinate de des Mittel-

punktes heiße b. Der Radius des Kreises heiße r. Bezeichnen wir die Abscisse cb eines beliebigen Curvenpunktes f durch x, die Ordinate hf desselben Punktes durch y, so ist, da $eg = x - a$ und $gf = y - b$, und $eg^2 + gf^2 = r^2$, auch

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

und dies ist die allgemeine auf jedes beliebige Coordinatensystem bezügliche Gleichung des Kreises. Drücken wir, wie gewöhnlich, die Ordinate als Function der Abscisse aus, so haben wir

$$y = b \pm [r^2 - (x-a)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Soll ein Kreis irgend eine andere Curve im zweiten Grade berühren, so müssen drei Bedingungen erfüllt werden, nämlich erstens muß, in sofern beide Curven auf dasselbe Coordinatensystem bezogen werden, im Berührungspunkte der Kreis dieselbe Ordinate haben als die andere Curve, zweitens muß er denselben ersten Differentialquotienten der Ordinaten, und drittens denselben zweiten Differentialquotienten der Ordinaten haben im Berührungspunkte als die andere Curve. Stellen wir die Ordinate der andern Curve durch f(x) vor, so muß bei dem einzelnen übrigens beliebigen Werthe x_1 der Abscisse, für welchen die Berührung stattfinden soll 1) $y = f(x_1)$, 2) $\frac{dy}{dx} = \frac{df(x_1)}{dx}$, 3) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2f(x_1)}{dx^2}$ sein. Da die allgemeine Gleichung des Kreises drei unbestimmte Constanten a, b und r enthält, so sieht man, daß die Werthe von a, b und r immer so genommen werden können, daß den drei obigen Gleichungen genügt wird. Es folgt daraus, daß es bei jeder Curve möglich ist, durch jeden beliebigen Curvenpunkt einen Kreis zu legen, welcher die Curve im zweiten Grade berührt. Zugleich folgt aber auch, daß man bei einem Kreise nicht vorschreiben kann, daß er eine Curve im dritten oder in einem höheren Grade berühren soll, weil er sonst noch mehreren Bedingungen genügen müßte, während die drei Con-

stanten doch durch drei Bedingungen schon völlig bestimmt werden. Der Kreis kann nur zufällig eine andere Curve in einem höheren als dem zweiten Grade berühren, wenn es sich entweder gerade so trifft, daß der dritte Differentialquotient der Ordinaten einer Curve mit dem des Kreises zusammenfällt, oder wenn dieser dritte Differentialquotient absichtlich so bestimmt wird. Setzen wir in den obigen drei Gleichungen statt y, $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ die Werthe, die diesen Ausdrücken zukommen vermöge der allgemeinen Gleichung des Kreises, und lösen wir diese Gleichungen so auf, daß die Constanten a, b und r durch die Größen x_1, $f(x_1)$, $\frac{df(x_1)}{dx}$, $\frac{d^2f(x_1)}{dx^2}$ ausgedrückt erscheinen, und setzen diese für a, b und r erhaltenen Werthe in die allgemeine Gleichung des Kreises, so haben wir in derselben die Gleichung eines Kreises, welcher eine beliebige Curve, deren Ordinate $f(x)$ ist, in einem Punkte, dessen zugehörige Abscisse den beliebigen Werth x_1 hat, im zweiten Grade berührt.

Aus der Gleichung

$$y = b \pm [r^2 - (x-a)^2]^{\frac{1}{2}}$$

erhalten wir

$$\frac{dy}{dx} = \mp \frac{x-a}{[r^2-(x-a)^2]^{\frac{1}{2}}} \quad \text{und}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mp \frac{r^2}{[r^2-(x-a)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Mithin sind unsere drei Bedingungsgleichungen

$$b \pm [r^2-(x_1-a)^2]^{\frac{1}{2}} = f(x_1) \quad (1)$$

$$\mp \frac{x_1-a}{[r^2-(x_1-a)^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{df(x_1)}{dx} \quad (2)$$

$$\mp \frac{r^2}{[r^2-(x_1-a)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{d^2f(x_1)}{dx^2} \quad (3).$$

Um zunächst r zu finden, brauchen wir nur die beiden Gleichungen (2) und (3) zu benutzen, weil in denselben nur die zwei Unbekannten a und r vorkommen. Aus der Gleichung (2) folgt

$$(x_1 - a)^2 = \frac{r^2 \cdot \left[\frac{df(x_1)}{dx}\right]^2}{1 + \left[\frac{df(x_1)}{dx}\right]^2} \quad (4)$$

Setzen wir diesen Werth von $(x_1 - a)^2$ in die Gleichung (3) ein, so erhalten wir

$$\mp \frac{r^2}{\left[r^2 - \frac{r^2 \cdot \left[\frac{df(x_1)}{dx}\right]^2}{1 + \left[\frac{df(x_1)}{dx}\right]^2}\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{d^2 f(x_1)}{dx^2}$$

und hieraus ergibt sich nach gehöriger Zusammenziehung

$$r = \mp \frac{\left[1 + \left(\frac{df(x_1)}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 f(x_1)}{dx^2}}.$$

Es kommt uns zwar eigentlich hier nur auf die Größe des Radius des im zweiten Grade berührenden Kreises an; wollte man aber die vollständige Gleichung dieses Kreises haben, so brauchte man nur den für r gefundenen Werth in die Gleichung (4) einzuschieben, und erhielte

$$a = x_1 - \frac{\frac{df(x_1)}{dx}\left[1 + \left(\frac{df(x_1)}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2 f(x_1)}{dx^2}}$$

ferner diese für a und r gefundenen Werthe in die Gleichung (1) zu setzen, und erhielte

$$b = f(x_1) + \frac{1 + \left[\frac{df(x_1)}{dx}\right]^2}{\frac{d^2 f(x_1)}{dx^2}}.$$

und endlich die drei durch die gegebenen Größen x_1, $f(x_1)$, $\frac{df(x_1)}{dx}$, $\frac{d^2f(x_1)}{dx^2}$ bestimmten Ausdrücke für die drei Constanten a, b und r in die Gleichung (1) zu setzen.

Der Zusammenhang des in einem Curvenpunkte im zweiten Grade berührenden Kreises mit dem Krümmungskreise dieses Punktes ist aus dem Ausdrucke für r ersichtlich. Denn da die Krümmungsstärke oder $\frac{dW}{dL}$ bei einer Curve mit der Ordinate f(x) in einem Curvenpunkte, dessen zugehörige Abscisse x_1 ist, gegeben ist durch die Gleichung

$$\frac{dW}{dL}=\frac{\frac{d^2f(x_1)}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{df(x_1)}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

und da ferner der Radius r des Krümmungskreises dieses Punktes gleich ist $\frac{1}{\frac{dW}{dL}}$, so haben wir

$$r=\frac{\left[1+\left(\frac{df(x_1)}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2f(x_1)}{dx^2}}$$

und sehen also, daß der Radius des in irgend einem Curvenpunkte im zweiten Grade berührenden Kreises zusammenfällt mit dem Radius des Krümmungskreises dieses Curvenpunktes. Nun hat der im zweiten Grade berührende Kreis im Berührungspunkte eine gemeinschaftliche Tangente mit der berührten Curve. Wenn wir demnach den aus dem Werthe von $\frac{dW}{dL}$ berechneten Radius des Krümmungskreises eines Curvenpunktes senkrecht auf die Tangente dieses Punktes abtragen, so wird dieser Krümmungskreis zugleich die Curve im zweiten Grade berühren. Und da der im zweiten Grade berührende Kreis den ersten und

zweiten Differentialquotienten der Ordinaten mit der berührten Curve gemeinschaftlich hat im Berührungspunkte, und aus diesen Differentialquotienten der Ordinaten der Ausdruck für $\frac{dW}{dL}$ zusammengesetzt ist, so stellt dieser Kreis die geometrische Construction des momentanen Werthes von $\frac{dW}{dL}$ in dem öfter erwähnten Sinne vor.

Die Berechnung der Krümmungsstärke und des Radius des Krümmungskreises ist natürlich ganz unabhängig von dieser Abtragung des Kreises in der Lage, in welcher er zugleich im zweiten Grade berührt. Gewöhnlich wird bei der Erörterung der eben behandelten Aufgabe, statt, wie hier geschehen, von dem Begriffe der Krümmung und der durch die Werthe von $\frac{\Delta W}{\Delta L}$ und $\frac{dW}{dL}$ bestimmten Stärke derselben auszugehen, und die Lage des Krümmungskreises als eines im zweiten Grade berührenden, oder die geometrische Construction der Krümmungsstärke, als eine Zugabe beizufügen, von dem im zweiten Grade berührenden Kreise als solchem ausgegangen, und dann der Beweis zugefügt, daß die constante Krümmung desselben mit der momentanen des berührten Curvenpunktes zusammenfällt. In sofern dabei, was oft der Fall ist, der Begriff der Krümmung und die Bestimmung ihrer Stärke durch die Werthe der Ausdrücke $\frac{\Delta W}{\Delta L}$ und $\frac{dW}{dL}$ nicht vorangestellt und bestimmt hervorgehoben wird, läßt dieser Beweis sowol in Beziehung auf Deutlichkeit als auf Bündigkeit Manches zu wünschen übrig. Das Natürlichste und Sachgemäßeste ist aber offenbar, aus dem Begriffe und Wesen der Krümmung zuerst das Verfahren ihrer Berechnung abzuleiten, und darauf das Verfahren der geometrischen Construction zu gründen. Insbesondere hat man bei diesem Gange der Untersuchung den Vortheil, daß die Bedeutung der positiven oder negativen Werthe der Krümmungsstärke

unmittelbar einleuchtend ist, indem der positive oder negative Werth des Differentialquotienten $\frac{dW}{dL}$ keinen andern Sinn hat als der jedes andern Differentialquotienten. Der Radius des Krümmungskreises, da er gleich $\frac{1}{\frac{dW}{dL}}$ ist, hat nur abgeleiteterweise einen positiven oder negativen Werth. In sofern man nun von diesem Werthe des Radius als dem Ursprünglichen ausgeht, ist es zwar auch möglich, zu zeigen, daß der Werth des Radius positiv ausfällt bei einer convexen und negativ bei einer concaven Linie, aber dieser Nachweis beschränkt sich eigentlich auf die Darlegung des Zusammenfallens dieser Bestimmungen, ohne daß in dem Radius als solchem die Bedeutung einer solchen Entgegensetzung erkenntlich ist. Daß die Bedeutung dieser Entgegensetzung des Radius nicht ohne Schwierigkeit erschienen ist, beweisen am besten die vielen zum großen Theil sehr schwerfälligen und breiten Erklärungen, die man von derselben zu geben sich gemüßigt gefunden hat.

§. 141.

Die Gleichung der Tangente bei Polarcoordinaten.

Um die Formel für die Krümmungsstärke bei Polarcoordinaten aufzufinden, wollen wir denselben Weg wie vorher einschlagen, nämlich die beim Fortschritte der Curvenlänge eintretenden Veränderungen des Winkels, welchen die Tangente mit einer gewissen Anfangsrichtung macht, betrachten, und den Differentialquotienten dieser beiden Veränderlichen durch eine Function der willkürlich Veränderlichen des Polarcoordinatensystems darstellen. Wie man eine Tangente construirt bei einer Curve, deren Gleichung für Polarcoordinaten gegeben ist, vermittelst der Subtangente, oder wie man die Subtangente berechnet, ist zwar im §. 99 schon gezeigt worden. Aber die Kenntniß einer solchen einzelnen Linie, die gegen die Tangente in einer bestimmten Lage sich befindet, reicht für die Zwecke der

analytischen Geometrie im Allgemeinen und für die Auflösung des vorliegenden Problems nicht hin. Dazu bedarf es der allgemeinen Gleichung der Tangente, vermöge welcher wir jede beliebige Ordinate der Tangente, und nicht blos die Subtangente, angeben können. Die allgemeine Gleichung einer berührenden Geraden bei Polarcoordinaten kann nicht wie die allgemeine Gleichung der Tangente bei Parallelcoordinaten ohne Weiteres aus der Reihe (1) §. 125 entnommen werden, weil bei Polarcoordinaten die Ordinaten der geraden Linie nicht gleichmäßig wachsend sind, und jene Reihe nur das allgemeine Gesetz enthält für die Bildung der Gleichungen der in irgend einem Grade berührenden und in demselben Grade gleichmäßig wachsenden Linien. Vielmehr würde die aus jener Reihe entnommene Gleichung einer im ersten Grade gleichmäßig wachsenden und in demselben Grade berührenden Linie, in sofern sie auf Polarcoordinaten bezogen wird, die allgemeine Gleichung einer im ersten Grade berührenden Archimedeischen Spirale sein, weil bei dieser Spirale die Polarcoordinaten gleichmäßig wachsend sind.

Die allgemeine Gleichung der Tangente können wir nur aus der allgemeinen Gleichung der geraden Linie ableiten. Was die Aufstellung der Gleichung einer Linie überhaupt betrifft, so geht man bekanntlich dabei immer von demjenigen Coordinatensystem aus, durch welches die Gleichung dieser Linie sich am leichtesten finden läßt, und geht hernach durch Coordinatenverwandlung zu einem andern Coordinatensystem über. Die Gleichung der geraden Linie ist offenbar für Parallelcoordinaten am leichtesten zu erhalten, und dieselbe ist bekanntlich $y = a + bx$. Um aus derselben die allgemeine Polargleichung der geraden Linie darzustellen, wollen wir in Betreff der vorzunehmenden Coordinatenverwandlung folgende Annahmen machen. Sei ab Fig. 82 die Abscisse einer durch senkrechte Parallelordinaten beschriebenen Linie df, und in c der Anfangspunkt der Ordinatenaxen. Der Mittelpunkt des Abscissenkreises soll in diesen Anfangspunkt der Parallelordinaten verlegt

werden. Der negative Arm der Abscissenaxe soll die Anfangsrichtung der Polarordinaten sein, und folglich im Punkte o der Nullpunkt des Abscissenkreises. Die Drehung aus dem Nullpunkte nach rechts soll positiv sein, oder die durch diese Drehung erhaltenen Bogen des Abscissenkreises sollen durch positive Zahlen ausgedrückt werden. Der Radius des Abscissenkreises erhält immer den Zahlenwerth 1. Den veränderlichen Bogen oq oder op des Abscissenkreises wollen wir durch w und die zugehörige Polarordinate cd oder cf durch z ausdrücken, und die Parallelordinaten wie gewöhnlich durch x und y. Was unter den hier gesetzten Annahmen den Zusammenhang der beiden Ordinatensysteme betrifft, so ist unmittelbar einleuchtend, daß $z.\sin w = y$ und $-z.\cos w = x$ ist. Setzen wir also in eine Parallelcoordinatengleichung statt x und y diese Werthe, so erhalten wir eine Gleichung zwischen z und w, und somit die verlangte Polargleichung. Nehmen wir in der Gleichung $y = a + bx$ der geraden Linie diese Substitutionen vor, so erhalten wir

$$z.\sin w = a - b.z.\cos w \text{ oder}$$

$$z = \frac{a}{\sin w + b\cos w}$$

und dies ist die allgemeine Polargleichung der geraden Linie.

Soll eine gerade Linie Tangente einer Curve sein, so muß sie, wie leicht zu sehen, auch bei Polarordinaten im Berührungspunkte dieselbe Ordinate und denselben ersten Differentialquotienten der Ordinaten haben als die berührte Curve. Die Ordinate der berührten Curve, die eine ganz beliebige Function von w ist, sei vorgestellt durch $f(w)$. Die Gleichungen der berührten Curve und der Tangente sollen auf dieselben Ordinaten bezogen sein. Bezeichnen wir den einzelnen übrigens ganz beliebigen Werth von w, für welchen die Berührung der Tangente stattfinden soll, durch w_1, so muß der Werth, den die Ordinate fw annimmt für den Werth w_1 der Abscisse, oder fw_1 gleich sein dem Werthe, den die Ordinate der geraden Linie hat für

denselben Werth der Abscisse, d. h. gleich $\frac{a}{\sin w_1 + b.\cos w_1}$. Ebenso muß der für w_1 genommene erste Differentialquotient von fw, d. h. $\frac{dfw_1}{dw}$ gleich sein dem für w_1 genommenen ersten Differentialquotienten der Function $\frac{a}{\sin w + b \cos w}$. Der erste Differentialquotient dieser Function von w ist aber $\frac{a(b \sin w - \cos w)}{(\sin w + b \cos w)^2}$. Wir erhalten also, wenn die allgemeine Gleichung der geraden Linie in die allgemeine Gleichung der Tangente übergehen soll, für dieselbe die beiden Bedingungsgleichungen

$$fw_1 = \frac{a}{\sin w_1 + b \cos w_1} \quad (1)$$

$$\frac{dfw_1}{dw} = \frac{a(b \sin w_1 - \cos w_1)}{[\sin w_1 + b \cos w_1]^2} \quad (2).$$

Die beiden Werthe von a, die sich aus beiden Gleichungen ergeben, sind

$$a = fw_1 (\sin w_1 + b \cos w_1)$$

$$a = \frac{dfw_1}{dw} \cdot \frac{[\sin w_1 + b \cos w_1]^2}{b \sin w_1 - \cos w_1}.$$

Setzen wir diese Werthe von a unter einander gleich, und lösen die dadurch entstehende Gleichung auf in Bezug auf b, so erhalten wir

$$b = \frac{\frac{dfw_1}{dw} . \sin w_1 + fw_1 \cos w_1}{fw_1 \sin w_1 - \frac{dfw_1}{dw} . \cos w_1}.$$

Diesen Werth von b eingesetzt in die Gleichung (1) ergibt sich

$$a = \frac{(fw_1)^2}{fw_1 \sin w_1 - \frac{dfw_1}{dw} . \cos w_1}.$$

Wenn wir diese Werthe, welche die Größen a und b der allgemeinen Gleichung der geraden Linie annehmen für den

Fall, daß die gerade Linie eine Curve mit der Ordinate $\mathrm{f}w$ für den Werth w_1 der Abscisse im ersten Grade berührt, in die allgemeine Gleichung der geraden Linie einsetzen, so erhalten wir

$$z = \frac{\dfrac{(\mathrm{f}w_1)^2}{\mathrm{f}w_1 \sin w_1 - \dfrac{\mathrm{d}\mathrm{f}w_1}{\mathrm{d}w} . \cos w_1}}{\sin w + \left[\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}\mathrm{f}w_1}{\mathrm{d}w} . \sin w_1 + \mathrm{f}w_1 \cos w_1}{\mathrm{f}w_1 \sin w_1 + \dfrac{\mathrm{d}\mathrm{f}w_1}{\mathrm{d}w} . \cos w_1}\right] \cos w}$$

$$z = \frac{(\mathrm{f}w_1)^2}{\left[\mathrm{f}w_1 \sin w_1 - \dfrac{\mathrm{d}\mathrm{f}w_1}{\mathrm{d}w} . \cos w_1\right] \sin w + \left[\dfrac{\mathrm{d}\mathrm{f}w_1}{\mathrm{d}w} . \sin w_1 + \mathrm{f}w_1 \cos w_1\right] \cos w}$$

und somit die allgemeine Gleichung der Tangente. Die Buchstaben w und w_1 sind wohl zu unterscheiden in dieser Formel, indem w den fließenden oder veränderlichen Werth der Abscisse angibt, für welchen eine beliebige Ordinate der Tangente berechnet werden soll, und w_1 den festen Werth der Abscisse, für welchen die Berührung der Tangente stattfinden soll.

Dieser allgemeine Ausdruck für die Ordinate der Tangente ist von dem mannichfaltigsten und ausgedehntesten Gebrauche. Der nächste und unmittelbarste ist, irgend eine bestimmte Ordinate der Tangente zu berechnen, was so viel heißen will als statt des w einen Werth zu setzen, der mit w_1 in irgend einem bestimmten Zusammenhange steht. Die sogenannte Subtangente z. B. ist diejenige Ordinate der Tangente, welche auf der Ordinate des Berührungspunktes senkrecht steht (siehe §. 99). Ist der Werth von $\frac{\mathrm{d}\mathrm{f}w_1}{\mathrm{d}w}$ positiv, so geht die Subtangente durch einen Punkt des Abscissenkreises, welcher gleich $w_1 - \frac{\pi}{2}$ ist. Wenn wir dem=

nach in dem allgemeinen Ausdrucke für die Ordinate der Tangente statt des veränderlichen w den Werth $w_1 - \frac{\pi}{2}$ setzen, so wird, da $\sin\left(w_1 - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos w_1$ und $\cos\left(w_1 - \frac{\pi}{2}\right) = \sin w_1$

$$\frac{(\mathrm{f}w_1)^2}{-\left[\mathrm{f}w_1 \sin w_1 - \frac{\mathrm{d}\mathrm{f}w_1}{\mathrm{d}w}.\cos w_1\right]\cos w_1 + \left[\frac{\mathrm{d}\mathrm{f}w_1}{\mathrm{d}w}.\sin w_1 + \mathrm{f}w_1 \cos w_1\right]\sin w_1}$$

$$\text{oder } \frac{(\mathrm{f}w_1)^2}{\frac{\mathrm{d}\mathrm{f}w_1}{\mathrm{d}w}}$$

der Werth der bestimmten Ordinate, welche die Subtangente heißt, und ist mit dem §. 99 gefundenen Ausdrucke derselben identisch.

§. 142.

Ausdruck der Krümmungsstärke bei Polarcoordinaten.

Der Winkel dac Fig. 82, den eine Tangente da mit der Anfangsrichtung der Ordinaten macht, soll W heißen, wobei vorausgesetzt ist, daß W durch eine aus der Richtung ac nach links gehende Drehung beschrieben ist. W sowol als die Curvenlänge L sind Functionen der Abscisse w. Wenn wir $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}w}$ durch $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}w}$ dividiren, so erhalten wir $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}L}$ als Function von w, und folglich die momentane Krümmungsstärke als Function von w. Den Ausdruck für $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}w}$ können wir nicht unmittelbar aufstellen, sondern wir müssen erst W als Function von w darstellen, und den Differentialquotienten durch Differentiiren bilden. Ziehen wir gc senkrecht auf die Anfangsrichtung der Ordina-

ten, so ist $\frac{gc}{ac}$ die trigonometrische Tangente des Winkels W, und in sofern wir, wie oben angenommen, die ganze Umdrehung durch die Zahl 2π ausdrücken, ist der Werth von W gleich dem des Bogens, dessen trigonometrische Tangente gleich $\frac{gc}{ac}$ ist. gc ist aber diejenige Ordinate der Tangente ag, für welche die Abscisse w den Werth $\frac{\pi}{2}$ hat, und ac ist die Ordinate der Tangente, für welche w den Werth 0 hat. Aus dem allgemeinen Ausdrucke der Ordinate der Tangente folgt, indem wir $w=\frac{\pi}{2}$ setzen,

$$gc=\frac{(fw_1)^2}{fw_1\sin w_1-\frac{dfw_1}{dw}.\cos w_1}$$

und indem wir $w=0$ setzen,

$$ac=\frac{(fw_1)^2}{\frac{dfw_1}{dw}.\sin w_1+fw_1\cos w_1}.$$

Da nun $W=\text{Arc}\left(tg=\frac{gc}{ac}\right)$, so haben wir allgemein

$$W=\text{Arc}\left[tg=\frac{\frac{dfw_1}{dw}.\sin w_1+fw_1\cos w_1}{fw_1\sin w_1-\frac{dfw_1}{dw}.\cos w_1}\right].$$

In der Gleichung der Tangente war unter w_1 zwar ein einzelner aber ganz beliebiger Werth von w vorgestellt. Der für W gefundene Ausdruck bezieht sich demnach auf alle beliebigen Werthe von w. Indem wir W veränderlich denken bei unserer Untersuchung über die Krümmung, so ist auch w_1 veränderlich zu denken, und es wird angemessen sein, in dem Ausdrucke für W überall w statt w_1 zu schreiben. Setzen wir in der schon oft gebrauchten Gleichung

$\frac{d\,Arc(tg = x)}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}$ statt x eine Function f(x) als willkürlich Veränderliche, so erhalten wir

$$\frac{d\,Arc[tg = f(x)]}{d f(x)} = \frac{1}{1 + [f(x)]^2}$$

und wenn wir statt df(x) setzen $\frac{df(x)}{dx} \,.\, dx$, und mit $\frac{df(x)}{dx}$ die Gleichung multipliciren, haben wir

$$\frac{d\,Arc[tg = f(x)]}{dx} = \frac{\frac{df(x)}{dx}}{1 + [f(x)]^2}.$$

Nach dem Schema dieser letzten Gleichung erhalten wir, indem wir $\frac{\frac{dfw}{dw} \,.\, \sin w + fw \cos w}{fw \sin w - \frac{dfw}{dw} \,.\, \cos w}$ statt f(x) setzen

$$\frac{d\,Arc\left[tg = \frac{\frac{dfw}{dw} \,.\, \sin w + fw \cos w}{fw \sin w - \frac{dfw}{dw} \,.\, \cos w}\right]}{dw}$$

$$= \frac{\dfrac{d\left[\frac{\frac{dfw}{dw} \,.\, \sin w + fw \cos w}{fw \sin w - \frac{dfw}{dw} \,.\, \cos w}\right]}{dw}}{1 + \left[\frac{\frac{dfw}{dw} \,.\, \sin w + fw \cos w}{fw \sin w - \frac{dfw}{dw} \,.\, \cos w}\right]^2}$$

Durch Ausführung der vorgeschriebenen Differentiation und gehörige Zusammenziehung geht die rechte Seite dieser Gleichung über in den Ausdruck

$$\frac{fw \cdot \frac{d^2fw}{dw^2} - (fw)^2 - 2\left(\frac{dfw}{dw}\right)^2}{(fw)^2 + \left(\frac{dfw}{dw}\right)^2}$$

mithin ist die gesuchte Differentialgleichung

$$\frac{dW}{dw} = \frac{fw \cdot \frac{d^2fw}{dw^2} - (fw)^2 - 2\left(\frac{dfw}{dw}\right)^2}{(fw)^2 + \left(\frac{dfw}{dw}\right)^2}$$

Wir müssen nun auch noch den Ausdruck für $\frac{dL}{dw}$ haben. Da derselbe in früheren Uebungsbeispielen noch nicht vorgekommen ist, so wollen wir ihn hier entwickeln. Die Linie ad Fig. 83 sei eine beliebige Curve, deren Ordinate gleich fw ist. Es handelt sich darum den Grenzwerth zu bestimmen, welchem sich der Quotient von ad und fg um so mehr nähert, je kleiner die Zunahme fg der Abscisse genommen wird, und zwar diesen Grenzwerth darzustellen als Function des beliebigen Abscissenwerthes, von welchem aus die Zunahme fg genommen ist. Da cf den Zahlenwerth 1 hat, und ca den Werth fw, so wird, wenn wir mit dem Radius ca den Kreisbogen ab beschreiben, bei jeder beliebigen Verkleinerung von fg der Bogen ab immer fw mal so groß sein als fg. Es reicht also, um den Grenzwerth des Quotienten $\frac{ad}{af}$ zu erhalten, auch hin, den Grenzwerth des Quotienten $\frac{ad}{ab}$ aufzustellen, und dann den Nenner desselben fw mal zu verkleinern, oder den Quotienten mit fw zu multipliciren. Indem wir die Linie cd nach der Lage der Linie ca zurückgedreht denken, so nähert sich das gemischtlinigte Dreieck abd ohne Ende einem geradlinigten, dessen eine aus dem Bogen ab hervorgegangene Seite senkrecht auf der zurückgedrehten Linie cd steht, und dessen andere aus dem Bogen ad hervorgegangene Seite die Richtung der Tangente ae hat. Die Grenze,

welcher sich der Quotient $\frac{db}{fg}$ bei Verkleinerung von fg ohne Ende nähert, ist nichts Anderes als $\frac{dfw}{dw}$. Da die Grenze des Quotienten $\frac{db}{ab}$ fw mal so klein ist, so ist dieselbe gleich $\frac{1}{fw} \cdot \frac{dfw}{dw}$. Folglich ist in dem angestrebten rechtwinkligen Dreieck die der Ecke a gegenüberliegende Kathete $\frac{1}{fw} \cdot \frac{dfw}{dw}$ mal so groß als die anliegende Kathete. Setzen wir also die Letztere gleich 1 und demnach die Andere gleich $\frac{1}{fw} \cdot \frac{dfw}{dw}$, so ist die Hypotenuse gleich $\sqrt{1 + \frac{1}{(fw)^2} \cdot \left(\frac{dfw}{dw}\right)^2}$. Der Ausdruck der Hypotenuse des angestrebten Dreiecks dividirt durch die der Ecke a anliegende Kathete, oder, da diese Kathete gleich 1 gesetzt war, dieser Ausdruck selbst ist der Grenzwerth des Quotienten $\frac{ad}{ab}$; und da derselbe, wie oben schon erwähnt, fw mal so klein ist als der Grenzwerth des Quotienten $\frac{ad}{fg}$, d. h. als der Differentialquotient von Curvenlänge und Abscisse, so ist

$$\frac{dL}{dw} = fw \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{(fw)^2} \cdot \left(\frac{dfw}{dw}\right)^2}$$

$$\frac{dL}{dw} = \sqrt{(fw)^2 + \left(\frac{dfw}{dw}\right)^2}.$$

Wenn wir den obigen Ausdruck von $\frac{dW}{dw}$ durch $\frac{dL}{dw}$ dividiren, so erhalten wir $\frac{dW}{dL}$ oder die Krümmungsstärke. Es ist also

$$\frac{dW}{dL} = \frac{fw \cdot \frac{d^2fw}{dw^2} - (fw)^2 - 2\left(\frac{dfw}{dw}\right)^2}{\left[(fw)^2 + \left(\frac{dfw}{dw}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Dieser Werth der Krümmungsstärke wird positiv ausfallen, wenn mit der Vergrößerung von L, oder was als dasselbe betrachtet werden darf, mit der Vergrößerung von w eine Vergrößerung von W, d. h. eine Drehung der Tangenten nach links verbunden ist, und negativ, wenn mit dem Wachsen des w eine Drehung der Tangenten nach rechts verbunden ist.

§. 143.

In der krummen Linie cbdea Fig. 47 (B. I.) ist in a der Nullpunkt des Abscissenkreises gesetzt, und $fw = \frac{1}{2\pi} . w$. Beispiele von der Krümmungsstärke bei Polarcoordinaten.

Da hier $\frac{dfw}{dw} = \frac{1}{2\pi}$ und $\frac{d^2fw}{dw^2} = 0$ ist, so haben wir

$$\frac{dW}{dL} = \frac{-\frac{w^2}{4\pi^2} - \frac{1}{2\pi^2}}{\left[\frac{w^2}{4\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2}\right]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2\pi(w^2+2)}{(w^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

Die Krümmung ist hier durchaus negativ, weil mit dem Wachsen des w immer eine Drehung der Tangenten nach rechts verbunden ist. Im Punkte c, wo $w=0$ ist, hat die Krümmung den Werth -4π, und der Radius des Krümmungskreises ist $\frac{1}{4\pi}$. Im Punkte a, wo $w=2\pi$, ist die Krümmung gleich $\frac{-2\pi(4\pi^2+2)}{(4\pi^2+1)^{\frac{3}{2}}}$. Je größer w wird, desto mehr verschwindet die Zahl 1 und 2 gegen w^2. Läßt man diese Zusätze wegfallen, so geht der Ausdruck der

Krümmungsstärke über in $\frac{2\pi}{w}$, d. h. je größer w wird, desto mehr steht die Abnahme der Krümmung im geraden Verhältniß zu w, und die Krümmung nähert sich dem Nullwerth.

In der Curve gek Fig. 48 ist in a der Nullpunkt des Abscissenkreises, und $fw = \frac{1}{w}$. Da hier $\frac{dfw}{dw} = -\frac{1}{w^2}$ und $\frac{d^2fw}{dw^2} = \frac{2}{w^3}$, so ist

$$\frac{dW}{dL} = \frac{\frac{1}{w} \cdot \frac{2}{w^3} - \frac{1}{w^2} - 2\frac{1}{w^4}}{\left[\frac{1}{w^2} + \frac{1}{w^4}\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{dW}{dL} = -\frac{w^4}{(w^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Für $w=0$ ist auch die Krümmung Null. Im Punkte e, wo $w=1$, ist die Krümmung $-\frac{1}{2}$, und der Radius des Krümmungskreises also doppelt so groß als der des Abscissenkreises ahf. Da für große Werthe von w die Zahl 1 als wegfallend gegen w^2 betrachtet werden kann, und in diesem Falle die Krümmung kurzweg gleich $-w$ wird, so sieht man, daß die Krümmung dieser Curve zuletzt im geraden Verhältniß von w wächst.

Die Gleichung einer Linie sei $fw = \sin w$, und es soll das Krümmungsgesetz derselben bestimmt werden. Da $\frac{dfw}{dw} = \cos w$ und $\frac{d^2fw}{dw^2} = -\sin w$, so ist

$$\frac{dW}{dL} = \frac{-\sin^2 w - \sin^2 w - 2\cos^2 w}{[\sin^2 w + \cos^2 w]^{\frac{3}{2}}} = \frac{-2}{1}.$$

Die Krümmung dieser Curve ist constant und gleich 2, d. h. doppelt so groß als die Krümmung des Abscissenkreises. Die durch die Gleichung $fw = \sin w$ bestimmte Curve ist

also selbst ein Kreis, welcher, da für $w=0$ auch $\sin w=0$ ist, durch den Mittelpunkt des Abscissenkreises gehen muß. In der That erhält man, wenn man den Kreis abd Fig. 84 als Abscissenkreis und den Punkt a als Nullpunkt desselben nimmt, durch Construction der Function $\sin w$ den Kreis bc.

Untersuchen wir noch das Krümmungsgesetz der Curve, deren Gleichung ist

$$fw = \frac{a}{\sin w + b\cos w}.$$

Lassen wir die Ausführung der Differentiation bei Seite, und nehmen nur die Resultate derselben, so ist

$$\frac{dfw}{dw} = -\frac{a(\cos w - b\sin w)}{(\sin w + b\cos w)^2}$$

und $$\frac{d^2fw}{dw^2} = \frac{a}{\sin w + b\cos w} + \frac{2a(\cos w - b\sin w)^2}{(\sin w + b\cos w)^3}.$$

Der Zähler des Ausdruckes der Krümmung ist demnach gegeben durch die Function

$$+\frac{a^2}{(\sin w + b\cos w)^2} + \frac{2a^2(\cos w - b\sin w)^2}{(\sin w + b\cos w)^4}$$
$$-\frac{a}{(\sin w + b\cos w)^2} - \frac{2a^2(\cos w - b\sin w)^4}{(\sin w + b\cos w)^4}.$$

Da dieser Zähler gleich Null ist, und der Nenner nicht, so ist die Krümmung gleich Null, und durch die obige Gleichung, wie wir auch aus §. 141 schon wissen, die gerade Linie vorgeschrieben.

Am Schlusse dieser Lehre von der Krümmungsstärke mag noch eine nachträgliche Bemerkung Platz finden. Nach Beantwortung der Frage, wie groß die Krümmung eines Curvenpunktes oder die momentane Stärke des Wachsens der Größen W und L ist, kann die Frage aufgeworfen werden, wie groß die Beschleunigung des Wachsens der Größen W und L ist, oder wie stark die Krümmung sich verändert. Denn wenn die Krümmung sich stetig verändert, so gibt es allaugenblicklich eine bestimmte Größe dieser Veränderung. Um diese bestimmen zu können, ist es nöthig, zuerst ein Maß für die Veränderung der Krüm-

mungsstärke festzusetzen, und dasselbe durch eine bestimmte Linie zu einer anschaulichen Vorstellung zu erheben, wie der Kreis die Krümmung selbst veranschaulicht und ein Maß für dieselbe abgibt. Eine Linie, in welcher die Krümmungsstärke gleichmäßig wächst mit der Größe L, oder welche eine gleichförmige Beschleunigung des Wachsens der Größen W und L hat, wird eine solche sein, in welcher $W = a + bL + cL^2$ ist. Um diese Linie, welche die schön geschwungene Form der Linie bae Fig. 85 hat, darzustellen, und durch dieselbe jede momentane Veränderung der Krümmungsstärke zu construiren, ist es unerläßlich, auf das schon oben erwähnte in der Curvenlehre von Peters angewandte Coordinatensystem und auf den Zusammenhang desselben mit andern Coordinatensystemen zurückzugehen. Da dies System aber nicht so bekannt geworden ist*), daß man die Behandlung der Curven nach demselben als etwas Geläufiges voraussetzen dürfte, so müssen wir, da wir hier doch keine Coordinatenlehre einschalten können, auf jede weitere Vertiefung in den Begriff der Krümmung, und auf die interessanten Gesetze der Wandlungen der Krümmungsstärke verzichten.

---

*) Vielleicht haben die zum Theil wegwerfenden Urtheile mancher Mathematiker über diese Curvenlehre der Verbreitung derselben entgegengewirkt. Ich gestehe, daß mir in einem solchen Urtheile wenig Verstand zu liegen scheint. Denn ich möchte doch wissen, auf welche Weise die Mathematiker auch nur diese einfache Aufgabe, die momentane Veränderung der Krümmungsstärke durch die erwähnte Linie so zu construiren, wie man die Krümmungsstärke durch den Kreis construirt, auflösen wollten ohne Anwendung dieses Coordinatensystems, geschweige denn alle anderen die Gesetze der Krümmungsveränderung betreffenden Fragen.

Dreizehntes Capitel.

Von der geradlinigten Bewegung in einem widerstehenden Medium.

§. 144.

So lange man den veränderlichen Zahlenwerth einer Raumgröße, sei es einer geraden oder krummen Linie, eines Winkels, einer Fläche, eines Kubikinhaltes oder welcher Raumgröße auch immer, als Function des veränderlichen Zahlenwerthes irgend einer andern Raumgröße betrachtet, befindet man sich auf dem Gebiete der Geometrie. Wenn man aber den veränderlichen Werth einer Raumgröße als Function des veränderlichen Zahlenwerthes der von einem beliebigen Anfangspunkte an gerechneten Zeit betrachtet, befindet man sich auf dem Gebiete der Bewegungslehre. Rein mathematisch betrachtet erscheint als das Wesentliche dabei, daß die Raumgrößen als Functionen einer veränderlichen Zahl überhaupt, die keinen räumlichen Repräsentanten hat, aufgefaßt werden sollen. Da aber alle Anwendungen, welche man von einer solchen Auffassung der Raumgrößen, als Functionen einer unräumlichen Veränderlichen, macht, sich auf die Bewegung beziehen, so wird diese den Raumgrößen zu Grunde gelegte willkürlich veränderliche Zahl lieber gleich beim Namen genannt, und man betrachtet die Raumgrößen als Functionen des fließenden Zahlenwerthes der Zeit. Es ist einleuchtend, daß diese Bewegungslehre so gut als die Geometrie ein Theil der reinen Mathematik ist, und mit äußeren Thatsachen nichts zu thun hat, und daß ferner alle irgendwo vorkommenden Bewegungsgesetze darin

enthalten sind, weil man die abstracten und reinen Bewegungsgesetze unter so viel beliebigen und complicirten Annahmen aufstellen kann, daß alle in der Natur irgend vorkommende Erscheinungen von Bewegungen darunter begriffen werden können. Sache der Erfahrung oder vielmehr der Anwendung ist dann blos dies, aus den Bedingungen einer Erscheinung entweder zu entscheiden, unter welches in der allgemeinen Bewegungslehre entwickelte Gesetz diese Erscheinung subsumirt werden kann, oder zu entscheiden, nach welcher Seite hin und für welche besonderen Annahmen man noch die Lehrsätze der allgemeinen Bewegungslehre ausbilden muß, um diejenigen Gesetze zu finden, unter welche eine vorhandene Erscheinung subsumirt werden kann. Denn die Menge der beliebigen Annahmen, unter welchen Gesetze der reinen Bewegungslehre aufgestellt werden können, ist unendlich, und man wird hauptsächlich diejenigen Lehrsätze dieser Wissenschaft ausbilden, mit welchen sich ein äußeres Interesse, das Interesse der Erklärung äußerlich dargebotener Naturerscheinungen verbindet.

Die zu einer Bewegung gebrauchte Zeit bezeichnen wir durch t, den durchlaufenen Raum durch s, die Geschwindigkeit durch c. In Bezug auf s ist zu bemerken, daß man darunter eigentlich zu verstehen hat die Bahnlänge, um welche der bewegte Körper von einem in seiner Bahn willkürlich genommenen Nullpunkt der Bahn entfernt ist. Denn wenn ein Körper sich in einer Bahn hin- und herbewegt, wie etwa ein Pendel oder ein in die Höhe steigender und auf derselben Linie wieder herabfallender Körper, und Selbstbedeckungen der Bahn stattfinden, so wäre es mit Unbequemlichkeiten verbunden, wenn man unter s den nach einer gewissen Zeit und nach mehreren Hin- und Hergängen wirklich durchlaufenen Raum verstehen wollte. Man versteht daher in diesem, wie in jedem andern Falle unter s die Bahnlänge, um welche der sich bewegende Punkt von dem Nullpunkte der Bahn entfernt ist. Ist die von dem Nullpunkte der Bahn nach Einer Seite hin genommene

Bahnlänge positiv gesetzt, so ist die nach der entgegengesetzten Seite genommene Bahnlänge negativ zu setzen. Denken wir den Raum s als Function der Zeit, so ist, wie schon §. 41 nachgewiesen, der erste Differentialquotient von Raum und Zeit gleich der momentanen Geschwindigkeit desjenigen Zeitpunktes, für welchen der Differentialquotient genommen ist, oder es ist allgemein $\frac{ds}{dt} = c$. Nach dem allgemeinen Begriffe des Differentialquotienten gibt der Zahlenwerth, welcher gleich $\frac{ds}{dt}$ erhalten wird für einen bestimmten Werth der Zeit, die Anzahl der Raumeinheiten an, welche vermöge der vorhandenen momentanen Geschwindigkeit in Einer Zeiteinheit durchlaufen werden würden, wenn diese Geschwindigkeit unverändert bliebe. Da $\frac{ds}{dt}$ positiv oder negativ ausfällt, je nachdem mit Zunahmen der Zeit positive oder negative Incremente von s verbunden sind, so wird die Richtung einer durch eine positive Zahl ausgedrückten Geschwindigkeit in der Richtung des Wachsens von s zu nehmen sein, mag dabei s selbst einen positiven oder negativen Werth haben und die Richtung einer durch eine negative Zahl ausgedrückten Geschwindigkeit in der Richtung des Abnehmens von s.

Der zweite Differentialquotient von s und t drückt die Beschleunigung des Wachsens von s und t aus. Nach dem allgemeinen Begriffe des zweiten Differentialquotienten gibt der Zahlenwerth, welcher gleich $\frac{d^2 s}{dt^2}$ erhalten wird bei einem bestimmten Werthe von t, die Raumeinheiten an, um welche der in der zweiten Zeiteinheit durchlaufene Raum größer sein würde als der in der ersten Zeiteinheit durchlaufene, wenn die bei dem bestimmten Werthe von t vorhandene momentane Beschleunigung des Wachsens von Raum und Zeit dauernd wäre. Da $c = \frac{ds}{dt}$, so wird der

Werth von $\frac{d^2 s}{d t^2}$ zusammenfallen mit dem Werthe von $\frac{d c}{d t}$. In sofern man entweder die Masse des bewegten Körpers als die Einheit der Masse betrachtet, oder die Bewegung unter Umständen auffaßt, bei welchen keine Verschiedenheit der Masse in Betracht kommt, so fällt die Beschleunigung des Wachsens von Raum und Zeit, oder die Stärke des Wachsens von Geschwindigkeit und Zeit bei einer geradlinigten Bewegungsbahn mit demjenigen zusammen, was man im physischen Sinne Kraft nennt. An sich ist die Beschleunigung des Wachsens von Raum und Zeit, oder die Stärke des Wachsens von Geschwindigkeit und Zeit noch kein Maß der Kraft, sondern diese Beschleunigung muß noch bezogen werden auf die Masse, welcher dieselbe ertheilt wird. In der reinen Bewegungslehre, in welcher man nur die Bewegung eines Punktes auffaßt, kann natürlich von Kraft als solcher gar keine Rede sein, sondern nur von den rein mathematischen Begriffen der Beschleunigung des Wachsens von Raum und Zeit, oder der Stärke des Wachsens von Geschwindigkeit und Zeit, da die Vorstellung der Kraft auf der Verbindung des Begriffes einer Beschleunigung des Wachsens von Raum und Zeit mit dem Begriffe der Masse beruht. In sofern man aber die Masse eines bewegten Körpers als die unbestimmte Einheit der Masse betrachtet, so fällt der Begriff der Kraft mit dem der Beschleunigung des Wachsens von Raum und Zeit zusammen. Man bedient sich deshalb auch wohl in der reinen Bewegungslehre des Wortes Kraft, indem man statt eines bewegten Punktes sich einen bewegten Körper mit der unbestimmten Masseneinheit denkt. In diesem Sinne soll in dem Folgenden das Wort Kraft gebraucht werden. Drücken wir die Kraft ebenso wie die Geschwindigkeit durch ein einfaches Zeichen aus, durch v, so haben wir in den Gleichungen

$$\frac{d s}{d t} = c \text{ und } \frac{d^2 s}{d t^2} \text{ oder } \frac{d c}{d t} = v$$

die Fundamentalsätze zunächst der geradlinigten Bewegung, aber damit auch aller Bewegung überhaupt, weil die Gesetze der krummlinigten Bewegung sich aus denen der geradlinigten ableiten lassen.

Was zunächst die geradlinigte Bewegung betrifft, so sieht man, daß das Gesetz einer solchen Bewegung vollkommen bestimmt ist, wenn irgend eine der vier Größen t, s, c, v als Function irgend einer andern unter denselben gegeben ist. Aufgabe der Lehre von der geradlinigten Bewegung wird es also sein, aus der zwischen zweien von den Größen t, s, c, v gegebenen Gleichung die Gleichung zwischen jeden zwei andern von diesen Größen abzuleiten. Um diese Aufgabe vollständig zu lösen, nehmen wir alle Combinationen dieser vier Elemente zu zweien, betrachten die Gleichung zwischen den combinirten Elementen als gegeben, und leiten die Gleichungen zwischen jedem Paar der Elemente daraus her. Indem wir bei einer zwischen zweien von diesen Größen, z. B. zwischen t und s, gegebenen Gleichung den Fall, in welchem s als Function von t gegeben ist, nicht unterscheiden von demjenigen, in welchem t als Function von s gegeben ist, so erhalten wir nur sechs Fälle von gegebenen Gleichungen. Es kann nämlich gegeben sein 1) s als Function von t. 2) c als Function von t. 3) v als Function von t. 4) c als Function von s. 5) v als Function von s. 6) v als Function von c.

Betrachten wir die sechs Fälle einzeln.

1) Gegeben ist s als Function von t, und gesucht ist c als Function von t und v als Function von t.

Die Lösung dieser Aufgabe ergibt sich unmittelbar aus den obigen Fundamentalgleichungen. Denn da $s = \mathrm{f}(t)$ gegeben ist, und daraus

$$c = \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{f}(t)}{\mathrm{d}t} \text{ und } v = \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{f}(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

folgt, so hat man c und v als Functionen von t.

2) Gegeben ist c als Function von t und gesucht s als Function von t und v als Function von t.

Setzt man in der gegebenen Gleichung $c=f(t)$ statt c den Ausdruck $\frac{ds}{dt}$, so hat man $\frac{ds}{dt}=f(t)$, und folglich

$$s=\int f(t).dt$$

und somit s als Function von t. Aus der gegebenen Gleichung folgt ferner $\frac{dc}{dt}=\frac{df(t)}{dt}$ oder

$$v=\frac{df(t)}{dt}$$

und also v als Function von t.

3) Gegeben ist v als Function von t, und die Functionen von t, welche gleich s und c sind, werden gesucht. Aus der gegebenen Gleichung $v=f(t)$ folgt zunächst, indem wir $\frac{dc}{dt}$ statt v setzen, $\frac{dc}{dt}=f(t)$ und folglich

$$c=\int f(t).dt.$$

Indem man in dieser letzten Gleichung $\frac{ds}{dt}$ statt c setzt, wird man aus der Gleichung $\frac{ds}{dt}=\int f(t)dt$ erhalten

$$s=\int[\int f(t)dt]dt.$$

Daß man, in sofern es sich um Lösung einer bestimmten Aufgabe der Art handelt, nach der ersten Integration in der Gleichung $c=\int f(t)dt$ erst die Constante bestimmen muß, ehe man zur zweiten Integration fortschreitet, versteht sich von selbst.

4) Gegeben ist c als Function von s und gesucht sind t und v als Functionen von s.

Aus der gegebenen Gleichung $c=f(s)$ folgt $\frac{ds}{dt}=f(s)$ oder $\frac{1}{f(s)}.ds=dt$ und folglich ist

$$t=\int\frac{1}{f(s)}.ds.$$

Da $\frac{dc}{dt} = v$, und folglich in unserm Falle $\frac{df(s)}{dt} = v$, so haben wir noch, um v als Function von s zu erhalten, aus dieser Gleichung dt zu eliminiren, und dt durch s auszudrücken. Dies kann geschehen, indem wir in der allgemeinen Gleichung $\frac{ds}{dt} = c$ den in unserm Falle gegebenen Werth von c, nämlich $f(s)$ setzen, und werden aus der Gleichung $\frac{ds}{dt} = f(s)$ erhalten $dt = \frac{ds}{f(s)}$. Wird dieser Werth von $d(t)$ in die obige Gleichung $v = \frac{df(s)}{dt}$ substituirt, so ergibt sich

$$v = \frac{df(s)}{ds} . f(s).$$

5) Gegeben ist v als Function von s, und gesucht sind die Functionen von s, welche gleich t und c sind.

Die gegebene Gleichung $v = f(s)$ wird zunächst geschrieben $\frac{dc}{dt} = f(s)$. Um eine Gleichung blos zwischen c und s zu erhalten, müssen wir dt in dieser Gleichung eliminiren, und durch c und s ausdrücken. Dies geschieht vermittelst der Gleichung $\frac{ds}{dt} = c$, aus welcher wir $dt = \frac{ds}{c}$ erhalten. Setzen wir in die gegebene Gleichung diesen Werth von dt, so haben wir $c.dc = f(s)ds$, und folglich, indem wir beiderseits integriren

$$\frac{c^2}{2} = \int f(s).ds.$$

Will man c für sich als Function von s darstellen, so muß man bei einer vorgelegten bestimmten Aufgabe zuerst die Constante bestimmen. Nennen wir dieselbe C, so haben wir

$$\frac{c^2}{2} = \int f(s).ds + C$$

$$c = \sqrt{2\int f(s)ds + C}.$$

Setzen wir, um t als Function von s zu erhalten, in dieser Gleichung $\frac{ds}{dt}$ statt c, so kommt $\frac{ds}{dt} = \sqrt{2\int f(s)ds + C}$ und $dt = \frac{ds}{\sqrt{2\int f(s)ds + C}}$, folglich ist

$$t = \int \frac{ds}{\sqrt{2\int f(s)ds + C}}.$$

6) Ist endlich v als Function von c gegeben, so sind s und t als Functionen von c zu suchen.

Schreibt man in der gegebenen Gleichung $v = f(c)$, $\frac{dc}{dt}$ statt v, so folgt aus der Gleichung $\frac{dc}{dt} = f(c)$ zunächst $dt = \frac{dc}{f(c)}$ und

$$t = \int \frac{dc}{f(c)}.$$

Um die Gleichung zwischen s und c zu erhalten, brauchen wir nur in der Gleichung $dt = \frac{dc}{f(c)}$ den aus der allgemeinen Gleichung $\frac{ds}{dt} = c$ zu entnehmenden Werth von dt zu substituiren, und erhalten $\frac{ds}{c} = \frac{dc}{f(c)}$, oder $ds = \frac{c.dc}{f(c)}$, und folglich ist

$$s = \int \frac{c.dc}{f(c)}.$$

Wir haben zwar, wenn Eine von den vier Größen t, s, c, v als Function einer Andern gegeben war, in den voranstehenden Gleichungen zunächst nur die beiden Uebrigen als Functionen derselben willkürlich Veränderlichen dargestellt; aber es ist einleuchtend, daß vermöge der gefundenen Gleichungen auch jede von den vier veränderlichen Größen als Function jeder andern erhalten werden kann in jedem von den sechs Hauptfällen. Denn wollte man z. B. in dem Falle (4), in welchem c als Function von s gegeben war, und t und v als Functionen von s gefunden worden sind, die Gleichung zwischen c und t aufstellen, so

brauchte man nur die Gleichungen $c=\mathfrak{f}(s)$ und $t=\int\frac{1}{\mathfrak{f}(s)}.ds$ in Bezug auf s als Unbekannte aufzulösen, und die zwei Werthe von s, von denen der Eine durch c, der Andere durch t ausgedrückt erscheint, untereinander gleich zu setzen, um eine Gleichung zwischen t und c zu haben. Oder wollte man bei demselben Falle (4) die Gleichung zwischen v und c haben, so brauchte man nur die aus den Gleichungen $c=\mathfrak{f}(s)$ und $v=\frac{d\mathfrak{f}(s)}{ds}.\mathfrak{f}(s)$ entnommenen Ausdrücke für s untereinander gleich zu setzen.

Die in den sechs Hauptfällen abgeleiteten Gleichungen geben den Gang an, den man nothwendig nehmen muß, um von einer zwischen zweien der vier Größen t, s, c, v gegebenen Gleichung zu der Gleichung zwischen jeden zweien andern dieser Größen zu gelangen, und bringen dadurch Ordnung und Plan in eine vorgelegte Untersuchung der Art. Denn die beiden aus der gegebenen Gleichung in jedem der sechs Fälle abgeleiteten Gleichungen sind überall die ersten und nächsten, die man haben muß, um zu andern Gleichungen zu gelangen. Wir haben schon im letzten Paragraphen des achten Capitels eine hierhergehörende Aufgabe gelöst. Wir hatten uns dort die Aufgabe gestellt, die geradlinigte Bewegung zu bestimmen, welche ein Körper annimmt, wenn er von einer Kraft getrieben wird, die in demselben Maße zunimmt, als die Entfernung des Körpers von einem gewissen Punkte, den wir die Gleichgewichtslage nannten, zunimmt. In dieser Aufgabe war also v, oder die Beschleunigung des Wachsens von Raum und Zeit, als Function des Raumes gegeben, und dieselbe gehörte unter den fünften der oben aufgezählten Fälle. Wenn man die in dem angezogenen Paragraphen gegebene Behandlung dieser Aufgabe nachsehen will, so wird man finden, daß die in dem Falle (5) angegebene Aufeinanderfolge der Gleichungen auch in der Lösung dieser Aufgabe vorkommt.

Es verdient noch bemerkt zu werden, daß die über

den Zusammenhang und die Abhängigkeit von Zeit, Raum, Geschwindigkeit und Kraft bei der geradlinigten Bewegung aufgestellten Sätze an sich mit diesen bestimmten Größen nichts zu schaffen haben, sondern ganz unabhängig von dieser Anwendung als allgemeine ganz abstracte Sätze aufgestellt werden können. Denn in sofern man s als eine Function von t betrachtet, ist c der erste und v der zweite Differentialquotient dieser Function. Wenn man nun statt der benannten Zahl t eine willkürlich Veränderliche x überhaupt setzt, statt s eine Function f(x), statt c die Function $\frac{df(x)}{dx}$, und $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ statt v, so sieht man, daß man auf die über den Zusammenhang von t, s, c und v entwickelten Sätze kommen muß, sobald man sich die Aufgabe stellt, aus jeder zwischen zweien der vier Größen x, f(x), $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ gegebenen Gleichung die Gleichung zwischen jeden zwei andern derselben vier Größen herzuleiten. Es sind also nur ganz allgemeine abstracte Sätze der Differentialrechnung, welche auf die benannten Größen Zeit, Raum, Geschwindigkeit und Kraft angewandt die sämmtlichen Gesetze der geradlinigten Bewegung darstellen. Man stellt freilich diese Sätze, wie unzählige andere, in der Regel nur in Beziehung auf eine von denselben zu machende Anwendung auf. Es ist übrigens hieraus ersichtlich, daß die Differential- und Integralrechnung allein die angemessenen und hinreichenden Mittel darbieten kann, Gesetze der Bewegung zu finden, weil diese ersten und wichtigsten Gesetze der Bewegungslehre nichts weiter sind, als in besondere Worte eingekleidete Sätze der Differential- und Integralrechnung. Man könnte jene Sätze auch beliebig erweitern, indem man zu den vier Größen x, f(x), $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$, noch die fünfte $\frac{d^3f(x)}{dx^3}$, oder einen folgenden Differentialquotienten zufügte, und aus der zwischen zweien

dieser Größen gegebenen Gleichung die Gleichung zwischen jeden zwei anderen ableitete. Man thut es aber nicht, weil in der Anwendung dieser Sätze auf die Bewegungslehre der Fall kaum vorkommt, daß $\frac{d^3 s}{d t^3}$ oder $\frac{d v}{d t}$, d. h. die Veränderung der Kraft, als Function des Raumes oder der Geschwindigkeit und dergleichen ursprünglich gegeben wäre.

§. 145.

Maß des Widerstandes in einem flüssigen Medium.

Um die in dem Folgenden aufzustellenden Gesetze der Bewegung in einem widerstehenden Medium durch anschauliche und naheliegende Beispiele erläutern zu können, ist es nöthig, vorher die Größe des Widerstandes in beliebigen Medien festzusetzen. Was erstens die Abhängigkeit des Widerstandes von der Geschwindigkeit des bewegten Körpers betrifft, so ist dieselbe leicht allgemein zu bestimmen. Denn bewegt sich ein Körper bei übrigens ungeänderter Größe und Lage der Oberflächentheile, welche das flüssige Medium aus seiner Stelle drängen, mit doppelt so großer Geschwindigkeit, so müssen nicht blos doppelt so viel Flüssigkeitstheile in Bewegung gesetzt werden, sondern diese Theile müssen auch in der Hälfte der Zeit eine ebenso große Verschiebung aus ihrer Lage erhalten, d. h. diesen Flüssigkeitstheilen muß eine doppelt so große Geschwindigkeit ertheilt werden. Nun gehört aber, um einer doppelt so großen Masse eine doppelt so große Geschwindigkeit in einer gewissen Zeit zu ertheilen, eine viermal so große Kraft dazu als um der einfachen Masse in derselben Zeit die einfache Geschwindigkeit zu ertheilen. Folglich wird auch die auf den mit doppelter Geschwindigkeit bewegten Körper ausgeübte Kraft des Widerstandes viermal so groß sein als die auf den mit einfacher Geschwindigkeit bewegten Körper, und überhaupt wird die Kraft des Widerstandes im quadratischen Verhältnisse der Geschwindigkeit des bewegten Körpers zunehmen.

Es fragt sich nun, wie groß diese Kraft des Widerstandes ist, wenn in einem Medium von bestimmter Dichtigkeit eine ebene Fläche mit einer bestimmten Geschwindigkeit sich so fortbewegt, daß die Richtung der Bewegung senkrecht auf die ebene Fläche ist. Diese Kraft des Widerstandes wird wie jede andere Kraft ausgedrückt durch ein Gewicht, d. h. durch den Druck, welchen eine gewisse Masse auf die Oberfläche der Erde ausübt. In diesem Drucke hat man beide Bestimmungen, auf welche es bei dem Begriffe der Kraft ankommt, nämlich eine Masse, und eine in dieser Masse stattfindende Beschleunigung des Wachsens von Raum und Zeit, zusammen. Denn indem ich sage, ein Gewicht von drei Pfunden, so drücke ich damit nicht blos eine bestimmte Masse aus, sondern eine Masse, welche einer bestimmten Beschleunigung, nämlich der bekannten durch die Schwerkraft hervorgebrachten Beschleunigung, unterworfen ist. Ob der Körper, dem ich diese Beschleunigung beilege, ruht oder sich bewegt, ist für die Beschleunigung ganz gleichgültig. Denn die Geschwindigkeit oder der erste Differentialquotient von Raum und Zeit kann wohl Null sein, ohne daß das Bestreben, diese Geschwindigkeit zu ändern, d. h. der zweite Differentialquotient von Raum und Zeit, gleich Null zu sein braucht, wie ja auch ein senkrecht steigender und wieder herabfallender Körper in demjenigen Zeitpunkte, in welchem die steigende Bewegung in die fallende übergeht, und die Geschwindigkeit gleich Null ist, noch dieselbe Beschleunigung der Schwerkraft hat wie in allen andern Zeitpunkten. Weil ein Gewicht eine Masse und eine Beschleunigung zugleich ausdrückt, so wird man, sobald eine Kraft durch ein Gewicht angegeben ist, im Stande sein, die durch diese Kraft in jeder beliebigen Masse hervorgebrachte Beschleunigung zu bestimmen; denn die Beschleunigung nimmt in demselben Maße ab, als die Masse oder, was dasselbe ist, der Trägheitswiderstand zunimmt. Wenn z. B. eine Kraft, die dem Drucke von fünf Pfunden gleich ist, auf eine Masse von 100 Pfunden wirkt, so

hat dieselbe eine Beschleunigung, welche dem zwanzigsten Theile der Beschleunigung des freien Falles gleich ist, oder der in jeder folgenden Secunde durchlaufene Raum ist um $\frac{3}{2}$ Fuß größer als der in der vorhergehenden Secunde durchlaufene.

Bei Bestimmung des Druckes, den eine Flüssigkeit auf eine Fläche ausübt, ist es offenbar einerlei, ob ich annehme, daß diese Fläche mit einer bestimmten Geschwindigkeit sich in einem flüssigen Medium fortbewegt, oder ob ich annehme, daß die Fläche ruht, und die Flüssigkeit sich mit derselben Geschwindigkeit bewegt, und an die widerstehende Fläche antrifft. Ferner ist es für die Bestimmung einer Kraft gleichgültig, ob dieselbe sich dadurch äußert, daß sie einer bestimmten Masse in einer gewissen Zeit eine bestimmte Geschwindigkeit ertheilt, oder dadurch, daß sie dieser Masse in derselben Zeit diese Geschwindigkeit entzieht, sowie es auch gleichgültig ist, ob eine Kraft darnach abgeschätzt wird, daß sie bestrebt ist einer bestimmten Masse in einer gewissen Zeit eine bestimmte Geschwindigkeit zu ertheilen, ohne daß wirklich eine Bewegung entsteht, oder darnach, daß sie die Entstehung dieser Geschwindigkeit in dieser Masse verhindert.

Die letztere Weise, die Kraft zu schätzen, wird uns dienen, den Druck, welchen eine bewegte Flüssigkeit auf eine widerstehende Fläche ausübt, in Pfunden auszudrücken. Denken wir ein mit Wasser gefülltes Gefäß, so ist der Druck, den dasselbe auf jeden Flächentheil des Bodens oder einer Seitenwand ausübt, gleich dem Gewicht einer Wassersäule, welche diesen Flächentheil zur Grundfläche, und die Tiefe desselben unter dem Niveau zur Höhe hat. Macht man eine Oeffnung in den Boden, so fließt bekanntlich das Wasser aus mit derjenigen Geschwindigkeit, welche ein frei fallender Körper erhalten haben würde, wenn er von dem Niveau des Wassers bis auf den Boden heruntergefallen wäre. Da nun gleichviel Kraft erfordert wird,

dem Wasser diese Geschwindigkeit, wenn es sie schon hat, zu entziehen, oder die Entstehung dieser Geschwindigkeit zu verhindern durch einen Gegendruck, so sieht man, daß der Druck, den eine mit bestimmter Geschwindigkeit fließende Wassermasse auf eine ihr entgegenstehende Fläche ausübt, gleich ist dem Gewichte einer Wassersäule, welche diese Fläche zur Grundfläche hat, und deren Höhe gleich ist derjenigen Fallhöhe, die der Geschwindigkeit des fließenden Wassers zugehörig ist. Was den Zusammenhang einer Fallhöhe und der bei dem Falle durch diese Höhe erlangten Endgeschwindigkeit betrifft, so ist bekanntlich, wenn man die Fallhöhe h in Fußen ausdrückt, die Endgeschwindigkeit so groß, daß vermöge derselben in jeder Secunde $\sqrt{60\,h}$ Fuß zurückgelegt werden. Drücken wir die der Fallhöhe h zugehörige Geschwindigkeit durch c aus, so folgt aus der Gleichung $c = \sqrt{60\,h}$, daß $h = \frac{c^2}{60}$. Es wird also, wenn eine Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit c auf eine senkrecht entgegenstehende Fläche F trifft, der dadurch auf diese Fläche hervorgebrachte Druck dem Obigen zu Folge gleich sein dem Gewichte, welches ein Volum $F . \frac{c^2}{60}$ dieser Flüssigkeit hat. Durch die constante Zahl 60 ist, was bei diesem Ausdrucke des Volums nicht zu vergessen, vorgeschrieben, daß c in Fußen und folglich F in Quadratfußen ausgedrückt ist, und also $F . \frac{c^2}{60}$ Kubikfuße vorstellt. Aus diesem für die Kraft des Widerstandes eines flüssigen Mediums aufgefundenen Maße ergibt sich zugleich, daß der Widerstand im quadratischen Verhältnisse der Geschwindigkeit des bewegten Körpers wächst, was wir schon im Eingange dieses Paragraphen auf naheliegende einfache Betrachtungen gestützt behauptet hatten.

Um ein Paar Beispiele der Berechnung des Widerstandes zu geben, so bewege sich das Wasser eines Flusses mit einer Geschwindigkeit von vier Fußen in der Secunde,

und es werde demselben eine Fläche von drei Quadratfußen entgegengestellt, so daß die Richtung des Stromes senkrecht zur Fläche ist. Alsdann ist der Druck, welchen das Wasser auf die ruhende entgegenstehende Fläche ausübt, gleich dem Gewicht von $3 \cdot \frac{4^2}{60}$ oder $\frac{4}{5}$ Kubikfuß Wasser. Nehmen wir das Gewicht des Kubikfußes Wasser zu 70 Pfunden an, so übt das fließende Wasser einen Druck von 56 Pfunden auf die Fläche aus. Sollte diese Fläche von drei Quadratfußen in einem stehenden Wasser mit einer Geschwindigkeit von vier Fußen in der Secunde fortbewegt werden in einer Richtung, die senkrecht auf die Fläche ist, so müßte natürlich die Fläche ebenfalls einen Druck von 56 Pfunden erfahren. Trifft die Luft mit einer Geschwindigkeit von 20 Fußen in der Secunde senkrecht auf eine Wand von 48 Quadratfußen, so ist der Druck auf die Wand gleich dem Gewicht von $48 \cdot \frac{20^2}{60}$ oder 320 Kubikfuß Luft. Da bei mittlerer Temperatur die Luft ungefähr achthundertmal leichter ist als Wasser, ein Kubikfuß Luft also $\frac{7}{80}$ Pfund wiegt, so beträgt der Druck auf die Wand $\frac{7}{80} \cdot 320$ oder 28 Pfund. Wenn ein Körper, z. B. ein Wagen, welcher der zu durchschneidenden Luft eine Fläche von 48 Quadratfußen darbietet, sich in ruhender Luft mit einer Geschwindigkeit von 20 Fuß in der Secunde bewegt, so beträgt der Widerstand in der Luft ebenfalls 28 Pfund.

§. 146.

Abhängigkeit des Widerstandes von der Form des bewegten Körpers.

In dem Vorhergehenden ist immer angenommen worden, daß die Richtung der Bewegung senkrecht auf die widerstehende Ebene sei. Um aber für beliebige bewegte Körper und bei beliebiger Lage derselben die Kraft des Widerstandes berechnen zu können, ist es nöthig, zuerst den Wi-

derstandsdruck auf eine ebene Fläche, die gegen die Richtung der Bewegung geneigt ist, zu bestimmen, und diese Bestimmung dann auf gebogene Flächen, deren einzelne Flächenelemente verschieden geneigt sind gegen die Richtung der Bewegung, zu übertragen.

Die Linie ab Fig. 86 sei der Durchschnitt einer Ebene, und cd die Richtung, in welcher eine Flüssigkeit sich bewegt, oder die Ebene in der ruhenden Flüssigkeit fortgeschoben wird. Der Winkel, den diese Richtung mit der Ebene bildet, der Winkel dca, heiße α. Der Druck, den die Flüssigkeit bei einer gewissen Geschwindigkeit c auf einen Quadratfuß der senkrecht entgegenstehenden Ebene ausübt, heiße in Pfunden ausgedrückt A. Zerlegen wir nach dem Parallelogramm der Kräfte den schiefen Druck in zwei seitliche Druckgrößen, von denen die eine ck mit der Ebene parallel, und die andere ce auf derselben senkrecht ist, so ist die nach ck gerichtete Druckgröße unwirksam auf die Ebene, und die nach der Richtung ce auf einen Quadratfuß der Ebene wirkende Druckgröße verhält sich zu A, wie ce:cg. Mithin ist die auf einen Quadratfuß der geneigten Ebene ab in senkrechter Richtung wirkende Druckgröße gleich $A.\sin\alpha$. Aber diese Druckgröße wirkt nicht ganz als Widerstand gegen die nach cd gerichtete Bewegung der Ebene, sondern bewirkt zum Theil eine Verschiebung der Ebene in der Richtung, welche auf cd senkrecht ist. Um die der Bewegung nach cd entgegenwirkende Kraft des Widerstandes allein zu haben, zerlegen wir die nach ce gerichtete Kraft abermals nach dem Parallelogramm der Kräfte in die Seitenkräfte ci und ch. Um so viel mal ci kleiner ist als ce, um so viel mal ist die auf einen Quadratfuß der Ebene ab nach der Richtung ci wirkende Kraft des Widerstandes kleiner als die nach der Richtung ce auf einen Quadratfuß wirkende Druckstärke, d. h. als $A.\sin\alpha$. Da nun ci:ce $=\sin\alpha:1$, so ist die in der Richtung cd auf einen Quadratfuß wirkende Kraft des Widerstandes gleich $A.\sin^2\alpha$. Enthält die geneigte Fläche F Quadratfuß, so ist der Ge-

sammtwiderstand auf dieselbe gleich $F.A.\sin^2\alpha$. Der Widerstand, den dieselbe Fläche findet, wenn sie senkrecht auf der Richtung der Bewegung steht, ist $F.A$. Also braucht man diesen letzteren Widerstand überall nur mit dem Quadrate des Sinus desjenigen Winkels, den die Ebene mit der Richtung der Bewegung bildet, zu multipliciren, um den Widerstand auf die geneigte Ebene zu erhalten.

Dieser Satz gibt uns die Mittel an die Hand, den Widerstand bei allen Körperformen und bei allen Lagen derselben zu berechnen. Nehmen wir an, der keilförmige Körper fcd Fig. 87 bewege sich in einem flüssigen Medium so, daß die Schärfe fa die Flüssigkeit durchschneidet. Die Grundfläche acd des Prismas sei ein gleichschenkliges Dreieck, und die Richtung der Bewegung falle zusammen mit der auf der Basis cd senkrecht stehenden Linie ab. Der Winkel cab ist das α unserer obigen Formel. Enthält die Seitenfläche feca des Prismas F Quadratfuß, so ist der Gesammtwiderstand auf die beiden Seitenwände des Keiles gleich $2F.A.\sin^2\alpha$. Die Fläche ecbh hat offenbar $F.\sin\alpha$, und die ganze Seitenfläche ecdg $2F.\sin\alpha$ Quadratfuß. Wenn man also den Keil umdrehte, und der Widerstand senkrecht auf die Fläche ecdg wirkte, so wäre derselbe gleich $2F.A.\sin\alpha$. Also ist der Widerstand auf den mit seiner Schärfe die Flüssigkeit durchschneidenden Keil $\sin\alpha$ mal so klein als auf den mit seiner Basis dieselbe durchschneidenden. Es möge ferner der senkrechte Kegel adb Fig. 88 mit seiner Spitze eine Flüssigkeit so durchschneiden, daß die Richtung der Bewegung mit der Achse ac parallel ist. Der Radius cb der Grundfläche enthalte r Fuß, die Seitenlinie ab sei gleich S Fuß, und der Winkel cab heiße α. Alle Elemente der krummen Oberfläche des Kegels sind um den Winkel α gegen die Richtung der Bewegung geneigt. Denken wir die krumme Oberfläche des Kegels aus einer beliebigen Anzahl schmaler Dreiecke zusammengesetzt, so ist, wenn die Fläche eines solchen Dreiecks aeg gleich f Fuß gesetzt wird, der Widerstand auf dasselbe gleich $f.A.\sin^2\alpha$.

Der Widerstand auf die gesammte krumme Oberfläche des Kegels ist also diese Oberfläche multiplicirt mit $A.\sin^2\alpha$. Die Oberfläche des Kegels ist gleich $r.\pi.S$ Quadratfuß. Folglich der Gesammtwiderstand gleich $r.\pi.S.A.\sin^2\alpha$. Da $\sin\alpha$ gleich $\frac{r}{S}$ ist, so kann dieser Widerstand auch durch $r^2\pi.A.\sin\alpha$ ausgedrückt werden. Der Widerstand auf die Grundfläche des Kegels, wenn dieselbe senkrecht auf die Richtung der Bewegung wäre, würde gleich $r^2.\pi.A$ sein. Auf die krumme Oberfläche ist derselbe also $\sin\alpha$ mal so klein. Durch Verkleinerung des Winkels α kann der Widerstand bei einem mit seiner Spitze durchschneidenden Kegel beliebig klein gemacht werden.

Um in einem bestimmten Falle den Widerstand nach diesen Formeln zu berechnen, muß das in denselben vorkommende A, d. h. der Widerstand auf einen zur Richtung der Bewegung senkrechten Quadratfuß, auf die im vorhergehenden Paragraphen angegebene Weise durch die Natur der Flüssigkeit und die Geschwindigkeit der Bewegung bestimmt werden. Geschieht z. B. die Bewegung in der Luft von gewöhnlicher Dichtigkeit mit einer Geschwindigkeit von 600 Fuß in der Secunde, so ist A gleich dem Gewichte von $\frac{600^2}{60}$ oder 6000 Kubikfuß Luft, gleich $\frac{7}{80}.6000$ oder 525 Pfund. Nehmen wir an, daß eine Spitzkugel, welche mit einer Kegelspitze die Luft durchschneidet, eine Geschwindigkeit von 600 Fuß in der Secunde habe. Der Radius r der Grundfläche des Kegels sei gleich $\frac{1}{60}$ und die Seitenlinie S gleich $\frac{1}{20}$ Fuß. Alsdann ist $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, und folglich nach der obigen Formel der Widerstand auf diesen Kegel gleich $\left(\frac{1}{60}\right)^2.\pi.525.\frac{1}{3}$ Pfund oder gleich 0,146.. Pfund.

Betrachten wir noch den Widerstand auf die gekrümmte Oberfläche des abgekürzten Kegels dbe Fig. 89, welcher

sich in der Richtung seiner Achse ac fortbewegt. Der Radius cd sei gleich r, der Radius ab gleich r_1, und die Seitenlinie bd gleich S Fuß. Der Winkel, den die Seitenlinie db mit der Achse ac macht, heiße α. Alle Flächentheile der gekrümmten Oberfläche sind um den Winkel α gegen die Richtung der Bewegung geneigt. Und da die gekrümmte Oberfläche $(r+r_1)\pi . S$ Quadratfuß enthält, so ist der Widerstand auf dieselbe gleich $(r+r_1)\pi . S . A . \sin^2\alpha$.

Diesen Ausdruck für den Widerstand auf die krumme Oberfläche eines abgekürzten Kegels können wir gebrauchen, um den Widerstand bei vielen krummen Oberflächen zu bestimmen, deren einzelne Flächentheile nicht gleich geneigt sind gegen die Richtung der Bewegung. Die bei weitem wichtigste Körperform der Art ist die Kugel, und wir wollen daher dieselbe als Beispiel wählen. Die Kugel ahi Fig. 90 bewege sich in der Richtung hi. Durch Schnitte, welche senkrecht auf hi sind, theilen wir die Kugeloberfläche in eine beliebige Anzahl Kugelzonen. Je kleiner die Zunahme dg des Durchmessers genommen wird, desto mehr fällt die Kugelzone mit der Oberfläche eines abgekürzten Kegels aemn zusammen. Da man den Gesammtwiderstand auf einen beliebigen Kugelabschnitt ahm betrachten kann als die Summe der Widerstände auf unendlich viele abgekürzte Kegel, deren Höhe dg verschwindend klein ist, so ist der Ausdruck für den Widerstand auf einen solchen Kegel des Differential des Gesammtwiderstandes. Sei hi die Abscisse des Kreises ahi, und in h der Nullpunkt derselben, und der Radius heiße r. Die Ordinatengleichung des Kreises ist also $y = (2rx - x^2)^{\frac{1}{2}}$. Die Linie ae, welche hier die Seitenlinie eines abgekürzten Kegels vorstellt, ist bekanntlich bei jeder Curve $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ mal so groß als dg, und also bei diesem Kreis, wo $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{r}{(2rx - x^2)^{\frac{1}{2}}}$

ist, $\frac{r}{(2rx-x^2)^{\frac{1}{2}}}$ mal so groß als dg. Bezeichnen wir die Zunahme dg der Abscisse durch dx, so ist die Seitenlinie ae des abgekürzten Kegels, oder das S der obigen Formel, gleich $\frac{r}{(2rx-x^2)^{\frac{1}{2}}}.dx$. Der Winkel, welchen die Flächentheile des abgekürzten Kegels mit der Richtung der Bewegung bilden, oder der Winkel α unserer Formel, ist der Winkel abd. Der Sinus dieses Winkels ist $\frac{ad}{ba}$, oder $\frac{ef}{ae}$, also allgemein $\frac{\frac{dy}{dx}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$. Für unsern Kreis ist demnach $\sin\alpha = \frac{r-x}{r}$. Die Ordinaten da und ge der Tangente ba sind die Radien der Grundflächen des abgekürzten Kegels, oder das r und r_1 unserer obigen Formel. Da dieselben bei Verkleinerung von dg sich unbegrenzt der Gleichheit nähern, so haben wir, um zu der Grenze des Ausdruckes für die Kegeloberfläche und für den Widerstand auf dieselbe überzugehen, 2ad statt ad + eg, oder statt des $r+r_1$ der Formel zu setzen, oder $r+r_1 = 2y = 2(2rx-x^2)^{\frac{1}{2}}$ zu nehmen. Setzen wir nun in der obigen Formel statt S, $\sin\alpha$, und $r+r_1$ die eben gefundenen Werthe, so haben wir in dem Ausdrucke

$$2(2rx-x^2)^{\frac{1}{2}}.\pi.\frac{r.dx}{(2rx-x^2)^{\frac{1}{2}}}.A.\frac{(r-x)^2}{r^2}$$

$$\text{oder } \frac{2\pi A}{r}.(r-x)^2dx$$

die Grenze, welcher sich der Werth des Widerstandes auf eine einzelne Kugelzone um so mehr nähert, je kleiner dx

genommen wird. Folglich ist $\frac{2\pi A}{r}.(r-x)^2 dx$ das Differential des Widerstandes, welcher auf einen Kugelabschnitt ausgeübt wird. Nennen wir diesen Widerstand W, so erhalten wir aus der Gleichung

$$dW = \frac{2\pi A}{r}.(r-x)^2 dx$$

$$W = -\frac{2\pi A}{3r}.(r-x)^3 + C.$$

Wollen wir nicht den auf eine Kugelzone, sondern den auf einen von h aus genommenen Kugelabschnitt stattfindenden Widerstand berechnen, so haben wir für $x=0$ auch den Nullwerth von W anzunehmen. Wenn wir demgemäß die Constante C bestimmen, so erhalten wir

$$W = -\frac{2\pi A}{3r}.(r-x)^3 + \frac{2\pi A r^3}{3}.$$

Den Widerstand auf die Halbkugel oder überhaupt auf die sich bewegende Kugel erhalten wir, wenn wir in dieser Gleichung $x=r$ setzen, und derselbe ist also gleich $\frac{2}{3}.\pi.Ar^2$. Da die Fläche eines größten Kreises der Kugel gleich $\pi.r^2$, und der senkrechte Widerstand auf dieselbe also gleich $\pi.r^2.A$ ist, so sehen wir, daß derselbe durch die Krümmung der Kugel um $\frac{1}{3}$ vermindert wird.

Eine Kanonenkugel, deren Radius $\frac{1}{4}$ Fuß beträgt, bewege sich mit einer Geschwindigkeit von 900 Fuß in der Secunde in Luft von gewöhnlicher Dichtigkeit. Der Factor A ist bei dieser Geschwindigkeit in der Luft gleich dem Gewichte von $\frac{900^2}{60}$ oder 13500 Kubikfuß Luft, gleich $\frac{7}{80}.13500$ oder 1181 Pfund. Folglich beträgt der Druck des Widerstandes auf die Kanonenkugel $\frac{2}{3}.\pi.1181.\frac{1}{16}$ oder 154,6... Pfund.

§. 147.

Bewegung in einem Medium bei bloßer Kraft des Widerstandes.

Nachdem wir in den beiden vorhergehenden Paragraphen die vorbereitenden Sätze aufgestellt haben, welche die Anwendung der bei widerstehenden Medien stattfindenden Bewegungsgesetze auf die Erscheinungen der umgebenden Natur ermöglichen, gehen wir zur Aufstellung dieser Gesetze selbst und zur Entwickelung des bei diesen Bewegungen stattfindenden Zusammenhanges der Größen t, s, c und v über. Wir wissen aus §. 145, daß bei einer Geschwindigkeit von c Fuß in der Secunde der senkrechte Widerstand auf eine ebene Fläche von F Quadratfuß gleich ist dem Gewichte von $\frac{F}{60} \cdot c^2$ Kubikfuß derjenigen Flüssigkeit, in welcher die Bewegung stattfindet. Bei Wasser z. B. ist dieser Widerstand in Pfunden ausgedrückt gleich $70 \cdot \frac{F}{60} \cdot c^2$ und bei Luft gleich $\frac{7}{80} \cdot \frac{F}{60} \cdot c^2$. Ueberhaupt wird bei jedem Körper, so lange er in unveränderter Lage ein flüssiges Medium durchschneidet, der Widerstand gleich sein einer constanten Zahl a multiplicirt mit c^2.

Wenn wir nun die im §. 144 aufgestellten Gesetze der geradlinigten Bewegung auf unsere Aufgabe anwenden wollen, so ist nicht zu vergessen, daß unter dem dort vorkommenden v nur die Beschleunigung der Bewegung, d. h. der Werth von $\frac{d^2 s}{d t^2}$ oder von $\frac{d c}{d t}$ zu verstehen ist, aber keineswegs die Kraft im eigentlichen Sinne, und in dem Sinne, in welchem wir dieselbe in den beiden vorhergehenden Paragraphen als Kraft des Widerstandes bestimmt und durch Gewichte ausgedrückt haben. Die Beschleunigung oder Retardation der Bewegung, welche ein Körper in einem widerstehenden Medium erfährt, wird ja offenbar nicht blos von dem Widerstande, sondern auch von der Masse des bewegten Körpers abhängen, weil eine bestimmte Kraft des Widerstandes in einem Körper mit größerer Masse eine

geringere Retardation der Bewegung hervorbringt als in einem Körper mit kleinerer Masse. Eine Kugel z. B., deren Durchmesser 1 Fuß beträgt, und die sich mit einer Geschwindigkeit von 120 Fuß in der Secunde in der Luft bewegt, erleidet einen Widerstand, der gleich 11 Pfund ist. Ist nun diese Kugel von Eisen, so ist ihr Gewicht ungefähr 287 Pfund. Da ein Druck von 287 Pfund in dieser Kugel eine Beschleunigung oder überhaupt eine Veränderung der vorhandenen Geschwindigkeit hervorbringt, welche gleich ist der Beschleunigung der Schwerkraft, so wird ein Druck von 11 Pfund, der fast 26 mal so klein ist, eine 26 mal so kleine Veränderung der Geschwindigkeit hervorbringen, oder der Werth von $\frac{d^2 s}{d t^2}$ wird $\frac{1}{26}$ der Beschleunigung der Schwerkraft sein. Da die Letztere für die Secunde gleich 30 Fuß ist, so wird bei der eisernen Kugel, in sofern dieselbe Zeit- und Raumeinheit zu Grunde gelegt wird, $\frac{d^2 s}{d t^2} = \frac{30}{26}$ zu setzen sein. Ist dieselbe Kugel von Holz mit einem specifischen Gewichte von $\frac{9}{10}$, so ist das Gewicht derselben 33 Pfund. Ein Druck von 11 Pfund bringt in einer Masse von 33 Pfund eine Geschwindigkeitsveränderung hervor, welche gleich $\frac{1}{3}$ der Beschleunigung der Schwerkraft ist, und folglich wird bei der hölzernen Kugel in dem Moment, wo sie die angenommene Geschwindigkeit von 120 Fuß in der Secunde hat, $\frac{d^2 s}{d t^2} = \frac{30}{3}$ zu setzen sein.

Da nun die Kraft des Widerstandes bei veränderlicher Geschwindigkeit im Allgemeinen durch die Form $a . c^2$ ausgedrückt wird, so wird die durch den Widerstand hervorgebrachte Retardation der Bewegung im Allgemeinen durch einen Ausdruck von derselben Form gegeben sein, nur daß der mit c^2 verbundene Factor nicht blos in Bezug auf die

Gestalt und Größe des bewegten Körpers und die Natur des widerstehenden Mediums, sondern auch in Bezug auf die Masse des bewegten Körpers bestimmt werden muß. Zur Bestimmung dieses constanten Factors können wir leicht auf folgende Weise gelangen. Bei jedem Körper und bei jedem widerstehenden Medium ist eine solche Geschwindigkeit der Bewegung denkbar, daß der Widerstand gleich dem Gewichte des Körpers ist. So z. B. müßte die hölzerne Kugel, deren Durchmesser ein Fuß und deren specifisches Gewicht $\frac{9}{10}$ ist, und die, wie vorher bemerkt, 33 Pfund wiegt, in der Luft eine Geschwindigkeit von 207 Fuß in der Secunde haben, damit die Kraft des Widerstandes 33 Pfund beträgt. Denn der Widerstand auf eine Kugel ist allgemein $\frac{2}{3}.\pi.r^2.A$. Da nun bei der Bewegung in der Luft und bei einer beliebigen Geschwindigkeit c, $A=\frac{7}{80}.\frac{c^2}{60}$ Pfund ist, und $r=\frac{1}{2}$ angenommen ist, so beträgt der Widerstand auf diese Kugel $\frac{2}{3}.\pi.\left(\frac{1}{4}\right).\frac{7}{80}.\frac{c^2}{60}$ Pfund. Um den Werth von c zu finden, bei welchem der Widerstand gleich dem Gewichte der Kugel, gleich 33 Pfund ist, bilden wir die Gleichung

$$\frac{2}{3}\pi.\frac{1}{4}.\frac{7}{80}.\frac{c^2}{60}=33$$

und erhalten $c=207$. Auf ähnliche Weise ist bei jedem Körper zu verfahren. Die bestimmte Geschwindigkeit, bei welcher der Widerstand gleich ist dem Gewichte des bewegten Körpers, heiße in dem Folgenden immer a. Die Beschleunigung der Schwerkraft soll durch g vorgestellt werden, und dieselbe ist der Geschwindigkeit a zugehörig. Nennen wir nun die einer beliebigen veränderlichen Geschwindigkeit c zugehörige Beschleunigung oder vielmehr Retardation v, so haben wir, da die Beschleunigungen bei dieser

Art von Bewegung sich allgemein verhalten wie die Quadrate der zugehörigen Geschwindigkeiten, die Proportion $v:g = c^2:a^2$, und $v = \frac{g}{a^2}.c^2$. In $\frac{g}{a^2}$ haben wir den gesuchten constanten Factor, welcher nicht blos in Rücksicht auf die Gestalt und Größe des bewegten Körpers und die Natur des widerstehenden Mediums, sondern auch in Rücksicht auf das Gewicht des Körpers bestimmt ist. Weil aber in dem Falle, als eine vorhandene Geschwindigkeit nur durch die Kraft des Widerstandes verändert wird, die Geschwindigkeit abnehmen muß mit Zunahme der Zeit, und also der Differentialquotient von Geschwindigkeit und Zeit oder der Ausdruck der Beschleunigung negativ sein muß, so haben wir für diesen Fall die Fundamentalgleichung

$$v = -\frac{g}{a^2}.c^2.$$

Da hier die Kraft als Function der Geschwindigkeit gegeben ist, so gehört diese Aufgabe unter den im §. 144 behandelten sechsten Fall. Die dort allgemein durch $f(c)$ ausgedrückte Function der Geschwindigkeit ist hier $-\frac{g}{a^2}.c^2$. Befolgen wir den im §. 144 vorgeschriebenen Gang der Auflösung, so erhalten wir zuerst

$$t = \int -\frac{a^2.dc}{g.c^2} = -\frac{a^2}{g}.\int c^{-2}.dc$$

$$t = \frac{a^2}{gc} + C.$$

Um die Constante zu bestimmen, müssen wir für irgend einen Werth von c den zugehörigen Werth von t wissen. Offenbar muß in dem Anfangszeitpunkte der Bewegung schon eine gewisse Geschwindigkeit vorhanden gewesen sein, weil sonst überhaupt keine Bewegung denkbar ist bei bloßer Kraft des Widerstandes. Bezeichnen wir diejenige Geschwindigkeit, welche für $t=0$ vorhanden war, durch c_1, so haben wir

$$t = \frac{a^2}{gc} - \frac{a^2}{gc_1}.$$

Nehmen wir an, daß die oben erwähnte Holzkugel mit dem Durchmesser 1 und dem specifischen Gewicht $\frac{9}{10}$ mit einer Geschwindigkeit von 100 Fuß in der Secunde sich zu bewegen angefangen habe, und fragen wir, nach wie viel Secunden ist die Geschwindigkeit 50 Fuß, so ist, da $a=207$, $c=50$ und $c_1=100$, die Anzahl der Secunden

$$t=\frac{207^2}{30.50}-\frac{207^2}{30.100}=14,2.....$$

Um die nach einer gewissen Zeit noch übrig bleibende Geschwindigkeit zu finden, haben wir die obige Gleichung umzukehren, und in Bezug auf c aufzulösen. Es ergibt sich

$$c=\frac{c_1 . a^2}{g c_1 t+a^2}.$$

Man sieht aus dieser Formel, daß die Geschwindigkeit nach langer Zeit zwar beliebig klein aber durch den Widerstand des Mediums allein niemals gleich Null werden kann.

Um ferner die Gleichung zwischen Raum und Geschwindigkeit zu erhalten, setzen wir in die §. 144 abgeleitete Gleichung $s=\int\frac{c.dc}{f(c)}$ statt $f(c)$ die Function $-\frac{gc^2}{a^2}$, und haben

$$s=\int-\frac{a^2 c.dc}{gc^2}=-\frac{a^2}{g}\int c^{-1}.dc$$

$$s=-\frac{a^2}{g}.\lg\operatorname{nat} c+C.$$

Nehmen wir an, daß in irgend einem Raumpunkte die Geschwindigkeit des Körpers bekannt, und gleich c_1 ist, und nehmen wir diesen Raumpunkt als denjenigen, von welchem aus wir die Werthe von s rechnen, so daß $c=c_1$ ist für $s=0$, so bestimmt sich daraus die Constante, und wir haben

$$s=-\frac{a^2}{g}.\lg\operatorname{nat} c+\frac{a^2}{g}\lg\operatorname{nat} c_1$$

$$s=\frac{a^2}{g}[\lg c_1-\lg c]$$

$$s = \frac{a^2}{g} \cdot \lg \mathrm{nat} \frac{c_1}{c}.$$

Um c durch s auszudrücken setzen wir

$$\lg \mathrm{nat} \frac{c_1}{c} = \frac{g s}{a^2}$$

$$\frac{c_1}{c} = e^{\frac{g s}{a^2}},$$

$$c = \frac{c_1}{e^{\frac{g s}{a^2}}}.$$

Aus dem für s aufgestellten Ausdrucke sieht man, daß der Raum bei fortwährend abnehmender Geschwindigkeit maßlos wächst, obgleich er im Verhältniß zu der Zahl $\frac{c_1}{c}$ nur so langsam wächst, wie die Logarithmen im Verhältniß zu den zugehörigen Zahlen, und aus dem Ausdrucke für c folgt ebenso wie vorher, wo c durch eine Function der Zeit gegeben war, daß c niemals gleich Null werden kann.

Es bleibt, um die vorgelegte Aufgabe vollständig zu lösen, nur noch übrig, die Gleichung zwischen Raum und Zeit aufzustellen. Da wir c durch eine Function von t und durch eine Function von s dargestellt haben, so brauchen wir nur diese beiden Ausdrücke für c untereinander gleich zu setzen, wobei wir annehmen, daß die durch die Constantenbestimmung hineingekommene Größe c_1 in beiden Ausdrücken denselben Werth hat, was immer eintrifft, wenn man den Nullwerth des s dahin verlegt, wo t=0 ist. Wir haben nun

$$\frac{c_1 a^2}{g c_1 t + a^2} = \frac{c_1}{e^{\frac{g s}{a^2}}}$$

$$e^{\frac{g s}{a^2}} = 1 + \frac{g c_1 t}{a^2}$$

$$\frac{g s}{a^2} = \lg \mathrm{nat}\left[1 + \frac{g c_1 t}{a^2}\right]$$

$$s = \frac{a^2}{g} \cdot \lg nat \left[1 + \frac{g c_1 t}{a^2}\right].$$

Aus der Gleichung

$$\frac{c_1 a^2}{g c_1 t + a^2} = \frac{c_1}{e^{\frac{g s}{a^2}}}$$

folgt auch $t = \dfrac{a^2\left[e^{\frac{g s}{a^2}} - 1\right]}{g c_1}$

Wollten wir auch noch v als eine Function von t oder von s darstellen, so brauchten wir nur die durch t oder s ausgedrückten Werthe von c in die ursprüngliche Gleichung $v = -\dfrac{g c^2}{a^2}$ zu substituiren, und wenn wir auch die so erhaltenen Gleichungen sowie die ursprüngliche Gleichung umkehrten, so hätten wir sämmtliche zwölf Gleichungen, welche zwischen den vier Größen t, s, c, v möglich sind, und in denen jede dieser vier Größen durch jede andere ausgedrückt erscheint. Damit sind aber die Bewegungsgesetze in einem widerstehenden Medium, in sofern außer der Widerstandskraft keine andere Kraft thätig ist, vollständig entwickelt.

§. 148.

Die Widerstandskraft in Verbindung mit einer constanten Kraft.

Da wir nur von der geradlinigten Bewegung in widerstehenden Medien sprechen, so wird angenommen, daß die constante Kraft in derselben Richtung wirkt, in welcher die Widerstandskraft wirkt. Ist eine von der constanten Kraft nicht erzeugte ursprüngliche Geschwindigkeit vorhanden, so muß diese also die Richtung der constanten Kraft haben. Die nächstliegende constante Kraft, welche bei der Bewegung in widerstehenden Medien in Betracht kommen kann, ist die Schwerkraft an der Oberfläche der Erde. Wir nehmen daher statt einer unbestimmten constanten Kraft gleich diese bestimmte, und haben, da die Bewegung geradlinigt bleiben soll, nur die fallende und die senkrecht steigende Bewegung in widerstehenden Medien zu untersuchen, oder vielmehr, da dieser Unterschied nicht wesentlich ist, die

beiden Fälle zu untersuchen, in welchen die constante Kraft entweder der Widerstandskraft entgegenwirkt oder mit derselben vereinigt einer vorhandenen Geschwindigkeit entgegenwirkt. Ist ein Körper specifisch schwerer als die Flüssigkeit, in welcher er sich bewegt, so werden die Widerstandskraft und die constante Kraft bei der fallenden Bewegung in entgegengesetzter Richtung und bei der steigenden Bewegung in derselben Richtung wirken. Ist aber ein Körper specifisch leichter als die Flüssigkeit, in welcher er fällt oder steigt, so wird die constante Kraft, die jetzt eine hebende ist, bei der fallenden Bewegung dieselbe Richtung haben als die Widerstandskraft, und bei der steigenden Bewegung die entgegengesetzte. Auf diesen Unterschied, ob die beiden Kräfte in derselben oder in entgegengesetzter Richtung wirken, kommt es bei den jetzt aufzustellenden Gesetzen allein an. In sofern die Gewichtsverminderung, welche ein Körper durch Eintauchen in eine Flüssigkeit erleidet, unbedeutend ist und gegen das Gewicht des Körpers als wegfallend betrachtet werden kann, wie es bei den meisten in der Luft eingetauchten Körpern der Fall ist, so kann die für den leeren Raum geltende Beschleunigung der Schwere als die constante Beschleunigung betrachtet werden, welche mit der Beschleunigung des Widerstandes verknüpft erscheint. Ist aber der Gewichtsverlust des Körpers in der Flüssigkeit nicht unbedeutend gegen das Gewicht desselben, oder ist er gar größer als das Gewicht, so hat man als constante Beschleunigung nur einen Theil der Beschleunigung der Schwere im leeren Raume zu setzen. Drückt man in diesen Untersuchungen die constante Beschleunigung überall durch dasselbe Zeichen G aus, so muß man wissen, daß in einem concreten Falle der Anwendung statt G entweder 30 Fuß oder ein durch das specifische Gewicht des Körpers und der Flüssigkeit bestimmter Theil von 30 zu setzen ist. Wäre z. B. der Gewichtsverlust eines Körpers in einer Flüssigkeit $\frac{1}{3}$ von dem Gewichte des Körpers,

so zieht die Schwere nur mit einer Kraft, welche $\frac{2}{3}$ von dem Gewichte des Körpers ist, und die fortzubewegende Masse ist gleich dem ganzen Gewichte des Körpers. Die stattfindende Beschleunigung wird also in diesem Falle $\frac{2}{3}$ von der Beschleunigung der Schwere, und gleich 20 Fuß zu setzen sein. Wir wollen übrigens, da es uns nicht auf eine vollständige physikalische Abhandlung, sondern auf die Erläuterung des Gebrauchs der Differential- und Integralrechnung in der Mechanik ankommt, bei den folgenden Untersuchungen die Beschränkung eintreten lassen, daß der Gewichtsverlust außer Acht gelassen wird, und drücken die constante Beschleunigung überall durch 30 Fuß oder g aus.

Wir betrachten zuerst den Fall, in welchem die constante Beschleunigung und die Beschleunigung oder vielmehr die Retardation des Widerstandes in entgegengesetzten Richtungen wirken, und in welchem also die constante Beschleunigung die vorhandene oder durch sie selbst erzeugte Geschwindigkeit vergrößert, während der Widerstand dieselbe immer vermindert. Wir haben demnach, so wie wir die Beschleunigung des Widerstandes negativ und gleich $-\frac{gc^2}{a^2}$ setzten, die constante Beschleunigung g positiv zu nehmen. Und da die resultirende Beschleunigung v nichts Anderes sein kann als die algebraische Summe beider Beschleunigungen, so erhalten wir für die fallende Bewegung

$$v = g - \frac{gc^2}{a^2}.$$

Der Gang der Auflösung der vorgelegten Aufgabe ist natürlich ganz derselbe als der in dem vorhergehenden Paragraphen befolgte, weil wieder die Beschleunigung als Function der Geschwindigkeit gegeben ist. Setzen wir statt des im §. 144 Nr. 6 vorkommenden unbestimmten $f(c)$ jetzt $g - \frac{gc^2}{a^2}$, so erhalten wir aus der gebildeten Gleichung zunächst

$$t = \int \frac{dc}{g - \frac{gc^2}{a^2}} = \frac{1}{g}\int \frac{1}{1 - \frac{c^2}{a^2}} . dc.$$

Da $\frac{1}{1 - \frac{c^5}{a^2}}$ zerlegt werden kann in die Summe der beiden Brüche $\frac{1}{2} . \frac{1}{1 + \frac{c}{a}} + \frac{1}{2} . \frac{1}{1 - \frac{c}{a}}$ (siehe §. 87), so können wir die vorstehende Gleichung auch schreiben

$$t = \frac{1}{2g}\int \frac{1}{1 + \frac{c}{a}} . dc + \frac{1}{2g}\int \frac{1.}{1 - \frac{c}{a}} . dc$$

und weil $\int \frac{1}{1 + \frac{c}{a}} . dc = a . \lg nat \left(1 + \frac{c}{a}\right)$ und $\int \frac{1}{1 - \frac{c}{a}} . dc$ $= - a . \lg nat \left(1 - \frac{c}{a}\right)$, so haben wir

$$t = \frac{a}{2g}\left[\lg nat \left(1 + \frac{c}{a}\right) - \lg nat \left(1 - \frac{c}{a}\right)\right] + C$$

$$t = \frac{a}{2g} . \lg nat \left(\frac{a + c}{a - c}\right) + C.$$

Nehmen wir an, daß der Körper in dem Moment, wo er anfängt zu fallen, die Geschwindigkeit 0 hat, so daß für $t = 0$ auch $c = 0$, so wird C selbst gleich Null, und die Gleichung zwischen Zeit und Geschwindigkeit ist dann ohne Weiteres

$$t = \frac{a}{2g} . \lg nat \left(\frac{a + c}{a - c}\right).$$

Wollen wir die Geschwindigkeit aus der Zeit finden, so setzen wir

$$\lg nat \left(\frac{a + c}{a - c}\right) = \frac{2gt}{a}$$

$$\frac{a + c}{a - c} = e^{\left(\frac{2gt}{a}\right)}$$

$$c = \frac{a\left(e^{\frac{2gt}{a}} - 1\right)}{e^{\frac{2gt}{a}} + 1}.$$

Die Geschwindigkeit nimmt zwar, wie man aus dieser Gleichung sieht, mit wachsender Zeit fortwährend zu, doch wird ihre Vergrößerung immer geringer, und sie nähert sich ohne Ende der constanten Geschwindigkeit a, weil je größer t wird, desto mehr die Zahl 1 gegen $e^{\frac{2gt}{a}}$ wegfällt, und die Ausdrücke $e^{\frac{2gt}{a}} - 1$ und $e^{\frac{2gt}{a}} + 1$, und folglich nicht minder die Werthe von c und a, sich der Gleichheit nähern.

Wenn wir bei der oben als Beispiel gebrauchten hölzernen Kugel mit dem Durchmesser 1 und dem specifischen Gewicht $\frac{9}{10}$, für welche bei der Bewegung in der Luft $a = 207$ war, fragen wie groß ihre Geschwindigkeit nach 10 Secunden ist, so erhalten wir

$$c = \frac{207\left(e^{\frac{600}{207}} - 1\right)}{e^{\frac{600}{207}} + 1} = 185{,}3\ldots \text{ Fuß.}$$

Setzen wir, um die Gleichung zwischen Raum und Geschwindigkeit zu erhalten, in die §. 144 Nr. 6. abgeleitete Gleichung $s = \int \frac{c.dc}{f(c)}$ die Function $g - \frac{gc^2}{a^2}$ statt f(c), so haben wir

$$s = \int \frac{c.dc}{g - \frac{gc^2}{a^2}} = \frac{1}{g}\int \frac{c.dc}{1 - \frac{c^2}{a^2}}.$$

Da der Differentialquotient von $-\frac{1}{2}a^2 \lg\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)$ gleich ist $\frac{c}{1 - \frac{c^2}{a^2}}$, wie man sich durch Differentiation leicht über-

zeugen kann, so ist $\int \frac{c.dc}{1-\frac{c^2}{a^2}} = -\frac{1}{2}a^2 \lg\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)$

und folglich

$$s = -\frac{a^2}{2g}.\lg\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right) + C.$$

Soll da, wo der Körper anfängt zu fallen, und $s=0$ ist, auch $c=0$ sein, so wird auch die Constante Null, und die Gleichung

$$s = -\frac{a^2}{2g}.\lg\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)$$

gibt den der Geschwindigkeit c zugehörigen Raum an. Weil $1-\frac{c^2}{a^2}$ nothwendig ein ächter Bruch und folglich $\lg\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)$ negativ ist, so wird der Werth von s, wie es auch in diesem Falle nicht anders sein darf, positiv erhalten.

Um die Geschwindigkeit aus dem durchlaufenen Fallraume, wenn er gegeben wäre, zu berechnen, müssen wir die letzte Gleichung in Bezug auf c auflösen. Man erhält aus

$$\lg\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right) = -\frac{2gs}{a^2}$$

$$1-\frac{c^2}{a^2} = e^{-\frac{2gs}{a^2}}$$

$$c^2 = a^2\left[1-e^{-\frac{2gs}{a^2}}\right]$$

$$c = a\left[1-e^{-\frac{2gs}{a^2}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Was endlich die Gleichung zwischen Raum und Zeit anlangt, so wird dieselbe dadurch erhalten, daß wir die beiden für c gefundenen Ausdrücke untereinander gleich setzen, oder daß wir, wenn s unmittelbar als Function von t dargestellt werden soll, in dem vorher für s gefundenen Werthe statt c den durch t ausgedrückten Werth von c setzen. Demnach ist

$$s = -\frac{a^2}{2g} \cdot \lg\left[1 - \frac{\left(e^{\frac{2gt}{a}} - 1\right)^2}{\left(e^{\frac{2gt}{a}} + 1\right)^2}\right].$$

Setzen wir in der Gleichung, durch welche t als Function von c gegeben ist, statt c den durch s ausgedrückten Werth desselben, so erhalten wir

$$t = \frac{a}{2g} \cdot \lg\left[\frac{a + a\left(1 - e^{-\frac{2gs}{a^2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{a - a\left(1 - e^{-\frac{2gs}{a^2}}\right)^{\frac{1}{2}}}\right].$$

In den gefundenen Gleichungen sind die Gesetze der Fallbewegung in leichten widerstehenden Medien, bei denen der Gewichtsverlust eines Körpers gegen sein Gewicht selbst nicht in Betracht kommt, vollständig enthalten. Sie gestatten zunächst eine Anwendung auf das Fallen der festen und flüssigen Körper in der Luft. Die Dichtigkeit der Luft wird innerhalb der Grenzen der Fallbewegung unveränderlich angenommen. Einer jeden Anwendung dieser Gesetze auf die Bewegung eines Körpers von bestimmter Größe, Gestalt und Dichtigkeit muß die Bestimmung der in allen diesen Formeln vorkommenden Zahl a vorausgehen. Wollen wir z. B. die Bewegung eines Regentropfens berechnen, so haben wir a bezüglich auf eine Wasserkugel vom Radius r zu bestimmen. Der Widerstand auf eine Wasserkugel, deren Radius gleich r Fuß ist, und die sich mit einer Geschwindigkeit von c Fuß in der Secunde in der Luft bewegt, beträgt dem Obigen (§. 146) zu Folge $\frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \frac{7}{80} \cdot \frac{c^2}{60}$ Pfund. Das Volum dieser Wasserkugel ist $\frac{4}{3} r^3 \cdot \pi$ Kubikfuß. Das Gewicht derselben also $\frac{4}{3} \cdot r^3 \pi \cdot 70$ Pfund. Da die Zahl a diejenige Geschwindigkeit vorstellt, bei welcher der Widerstand gleich ist dem Gewicht des Körpers, so ist der aus der Gleichung

$$\frac{2}{3}.\pi r^2.\frac{70}{800}.\frac{c^2}{60}=\frac{4}{3}r^3\pi.70$$

sich ergebende Werth von c gleich a. Die Gleichung gibt $c=\sqrt{96000\,r}=309{,}6..\sqrt{r}$. Wir sehen, daß durch Verkleinerung von r die Zahl a jeden beliebigen Grad von Kleinheit erhalten kann. Die Geschwindigkeit a ist natürlich die größte, welche ein fallender Körper annehmen kann. Denn hat er die Geschwindigkeit a, so wird er durch sein Gewicht heruntergezogen, und ein diesem Gewichte gleicher Druck des Widerstandes wirkt entgegen, und der Körper kann nun weder Beschleunigung noch Retardation seiner Bewegung haben. Aus den obigen Gleichungen, in welchen die Geschwindigkeit eines fallenden Körpers als Function von t oder s dargestellt ist, ist auch ersichtlich, daß a die Grenze bildet, welcher sich der Werth von c bei wachsendem t oder s ohne Ende nähert.

Denken wir, um ein bestimmtes Beispiel zu geben, einen Regentropfen, dessen Durchmesser eine halbe Linie beträgt, so ist, da $r=\frac{1}{400}$ Fuß, $a=309{,}6.\frac{1}{20}=15{,}48$ Fuß. Fragen wir, welche Geschwindigkeit derselbe angenommen hat, wenn er von einer Höhe von tausend Fuß heruntergefallen ist, so haben wir in der Gleichung

$$c=a\left[1-e^{-\frac{2gs}{a^2}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

1000 statt s zu setzen. Die Zahl $e^{-\frac{2gs}{a^2}}$ ist in diesem Falle so klein, daß man durch unsere Logarithmentafeln nur die Decimalstelle angeben kann, in welcher zuerst eine von Null verschiedene Ziffer eintritt. Ueberhaupt ist aus den Formeln zu ersehen, daß Wasserkugeln innerhalb derjenigen Grenzen ihrer Größe, welche sich bei Regentropfen finden, nach dem Durchlaufen eines kleinen Fallraumes oder nach einigen Secunden ihrer Fallzeit schon fast vollkommen die ihrer Größe zukommende Geschwindigkeit a erlangt haben, so daß man die Geschwindigkeit aller aus der Atmosphäre

herunterfallender Wasserkugeln ohne Fehler dem Maximum a gleich setzen kann. Sind die Wasserkugeln unmeßbar klein, wie beim Nebel oder den Wolken, so kann die Zahl a so klein werden, daß die auch bei völlig ruhender Luft eintretende Fallbewegung selbst nach längerer Zeit kaum merklich ist, und die Körper in der Luft zu schwimmen scheinen wie in einem flüssigen Medium, dessen specifisches Gewicht dem der schwimmenden Körper gleich ist, während doch das specifische Gewicht dieser schwimmenden Körper mehrere hundertmal größer ist als das der Flüssigkeit. Hat die Luft eine Bewegung aufwärts, welche der Geschwindigkeit a gleich ist, so ist die Fallbewegung völlig aufgehoben. Da nun auch ein schwacher etwas schief gerichteter Luftzug eine vertikale Componente seiner Bewegung haben kann, welche der bei sehr kleinen Körpern statthabenden Geschwindigkeit a gleich oder noch größer ist, so folgt, daß solche Körper, wie Nebel, feiner Staub und dergleichen bei ihrer auf- und absteigenden Bewegung schlechtweg nur dem jedesmaligen Luftzug zu folgen scheinen, und erst bei völliger Ruhe der Luft sich allmälig senken können.

Betrachten wir noch die senkrecht aufsteigende Bewegung in der Luft. Der Unterschied dieser Aufgabe von der vorhergehenden besteht blos darin, daß die Beschleunigung der Schwere jetzt so gut als die Beschleunigung des Widerstandes der vorhandenen Geschwindigkeit entgegenwirken, daß beide vielmehr eine Retardation der Bewegung oder des Wachsens von Raum und Zeit ausdrücken, und also beide negativ zu nehmen sind. Da übrigens die Ausdrücke dieser Kräfte dieselben sind wie vorher, so erhalten wir für die steigende Bewegung die Fundamentalgleichung

$$v = -\left(g + \frac{g c^2}{a^2}\right).$$

Auch hier haben wir, da v als Function von c gegeben ist, bei Aufsuchung der zwischen t, s, c und v geltenden Gleichungen den in §. 144 Nr. 6 vorgeschriebenen Gang zu befolgen, und erhalten zuerst

$$t = -\int \frac{dc}{g + \frac{g c^2}{a^2}} = -\frac{a}{g} \int \frac{\frac{1}{a} dc}{1 + \frac{c^2}{a^2}}.$$

Die aus der Lehre von der Differentiation der Kreisfunctionen bekannte Gleichung $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \text{Arc}(\text{tg} = x)$ läßt sich leicht auf die Formel $\int \frac{\frac{1}{a} . dc}{1 + \frac{c^2}{a^2}}$ ausdehnen. Denn setzt man $\frac{x}{a}$ statt x, so hat man $\frac{d \text{Arc}\left(\text{tg} = \frac{x}{a}\right)}{dx} = \frac{\frac{1}{a} . dx}{1 + \frac{x^2}{a^2}}$,

also $\int \frac{\frac{1}{a} . dx}{1 + \frac{x^2}{a^2}} = \text{Arc}\left(\text{tg} = \frac{x}{a}\right)$, und ebenso $\int \frac{\frac{1}{a} . dc}{1 + \frac{c^2}{a^2}}$ $= \text{Arc}\left(\text{tg} = \frac{c}{a}\right)$. Demnach ist unsere Gleichung

$$t = -\frac{a}{g} . \text{Arc}\left(\text{tg} = \frac{c}{a}\right) + C.$$

Für den Anfangszeitpunkt der Bewegung oder für $t = 0$ muß schon eine gewisse Geschwindigkeit vorhanden sein, wenn überhaupt eine steigende Bewegung stattfinden soll. Nennen wir diese Geschwindigkeit c_1, so ist

$$t = -\frac{a}{g} \text{Arc}\left(\text{tg} = \frac{c}{a}\right) + \frac{a}{g} \text{Arc}\left(\text{tg} = \frac{c_1}{a}\right)$$

$$t = \frac{a}{g}\left[\text{Arc}\left(\text{tg} = \frac{c_1}{a}\right) - \text{Arc}\left(\text{tg} = \frac{c}{a}\right)\right].$$

Die hier vorkommende Differenz zweier Bogen kann durch einen Bogen ausgedrückt werden. Denn gemäß der bekannten Gleichung

$$\text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg}\alpha - \text{tg}\beta}{1 + \text{tg}\alpha . \text{tg}\beta}$$

erhält man

$$\operatorname{tg}\left[\operatorname{Arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{c_1}{a}\right)-\operatorname{Arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{c}{a}\right)\right]=\frac{\frac{c_1}{a}-\frac{c}{a}}{1+\frac{c_1}{a}\cdot\frac{c}{a}}.$$

Folglich ist

$$\operatorname{Arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{c_1}{a}\right)-\operatorname{Arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{c}{a}\right)=\operatorname{Arc}\left[\operatorname{tg}=\frac{\frac{c_1}{a}-\frac{c}{a}}{1+\frac{c_1}{a}\cdot\frac{c}{a}}\right]$$

$$\text{und } t=\frac{a}{g}\cdot\operatorname{Arc}\left[\operatorname{tg}=\frac{\frac{c_1}{a}-\frac{c}{a}}{1+\frac{c_1}{a}\cdot\frac{c}{a}}\right]$$

$$\text{oder } t=\frac{a}{g}\operatorname{Arc}\left[\operatorname{tg}=\frac{c_1 a-c a}{a^2+c_1 c}\right].$$

Um die Geschwindigkeit als Function der Zeit darzustellen, setzen wir

$$\operatorname{tg}\left(\frac{g t}{a}\right)=\operatorname{tg}\operatorname{Arc}\left[\operatorname{tg}=\frac{c_1 a-c a}{a^2+c_1 c}\right]$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{g t}{a}\right)=\frac{c_1 a-c a}{a^2+c_1 c}$$

$$c=\frac{c_1 a-a^2\operatorname{tg}\left(\frac{g t}{a}\right)}{a+c_1\operatorname{tg}\left(\frac{g t}{a}\right)}.$$

Es soll die Geschwindigkeit berechnet werden, welche eine Bleikugel, deren Radius $\frac{1}{50}$ Fuß beträgt, nach drei Secunden hat, wenn sie in Luft von gewöhnlicher Dichtigkeit mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 300 Fuß in der Secunde senkrecht in die Höhe geworfen wird. Es ist zuerst der Werth zu bestimmen, den die Zahl a bei einer Bleikugel von diesem Radius annimmt. Das specifische Gewicht des Bleies ist 11,33. Sieht man zurück auf die Art, wie die Zahl a für eine Wasserkugel mit einem Radius von r Fuß berechnet und gleich $\sqrt{96000\,r}$ erhalten

worden ist, so wird man leicht finden, daß bei einer Bleikugel $a = \sqrt{11,33} . \sqrt{96000 r}$ ist. Für die Bleikugel, deren Radius gleich $\frac{1}{50}$ Fuß, ist $a = 147,49$. Da nach Annahme $c_1 = 300$ und $t = 3$, so ist

$$c = \frac{300 . 147,49 - (147,49)^2 . tg\left(\frac{90}{147,49}\right)}{147,49 + 300 . tg\left(\frac{90}{147,49}\right)} = 81,32.$$

Um den Raum als Function der Geschwindigkeit zu erhalten, setzen wir in die Gleichung $s = \int \frac{c . dc}{f(c)}$ (§. 144, 6) $-\left[g + \frac{gc^2}{a^2}\right]$ statt f(c) und haben

$$s = -\int \frac{c . dc}{g + \frac{gc^2}{a^2}} = -\frac{1}{g} . \int \frac{c . dc}{1 + \frac{c^2}{a^2}}$$

$$s = -\frac{a^2}{2g} . lg\left[1 + \frac{c^2}{a^2}\right] + C.$$

Ist c_1 die Geschwindigkeit, welche der Körper im Anfangspunkte oder in dem Nullpunkte des Raumes hat, so ist

$$s = -\frac{a^2}{2g} . lg\left[1 + \frac{c^2}{a^2}\right] + \frac{a^2}{2g} . lg\left[1 + \frac{c_1^2}{a^2}\right]$$

$$s = \frac{a^2}{2g}\left[lg\left(1 + \frac{c_1^2}{a^2}\right) - lg\left(1 + \frac{c^2}{a^2}\right)\right]$$

$$s = \frac{a^2}{2g} . lg\left[\frac{a^2 + c_1^2}{a^2 + c^2}\right].$$

Durch Auflösung dieser Gleichung in Bezug auf c als Unbekannte erhält man

$$c = \sqrt{\frac{a^2 + c_1^2}{e^{\frac{2gs}{a^2}}} - a^2}.$$

Wollten wir endlich den durchlaufenen Raum durch eine Function der Zeit ausdrücken, so nehmen wir den obigen durch t gegebenen Werth von c, und setzen ihn in die

Gleichung, in welcher s als Function von c erscheint. Wir haben dann

$$s = \frac{a^2}{2g} \cdot \lg \left[\frac{a^2 + c_1^2}{a^2 + \frac{\left[c_1 a - a^2 \operatorname{tg}\left(\frac{gt}{a}\right)\right]^2}{\left[a + c_1 \operatorname{tg}\left(\frac{gt}{a}\right)\right]^2}} \right].$$

Indem man ebenso den durch s gegebenen Werth von c in die obige Gleichung, in welcher t durch c gegeben ist, substituirt, erhält man die Zeit als Function des durchlaufenen Raumes.

Vierzehntes Capitel.

Frühere Rechnungsmethoden, welche als Vorstufen der Differential- und Integralrechnung gelten können.

§. 149.

Die Exhaustionsmethode der Alten.

Von denjenigen mathematischen Problemen, welche man jetzt ausschließlich durch Differential- und Integralrechnung behandelt, weil die Hülfsmittel dieser Wissenschaft den einfachsten und naturgemäßesten Weg ihrer Lösung darbieten, hat man auch vor der Entdeckung der Differential- und Integralrechnung einige leichtere zu lösen unternommen, und obgleich man dabei gar vielerlei Wege eingeschlagen hat, und ohne alle Ansprüche auf Allgemeingültigkeit der Methode überall denjenigen Weg gewählt hat, der sich bei der besonderen Natur eines einzelnen vorgelegten Problems als der bequemste und kürzeste darbot, so konnte es doch nicht fehlen, daß man zuweilen auf Methoden gerieth, welche denen der Differential- und Integralrechnung nahe

kommen. Diese Methoden treten bei den Neueren, bei denen alle Untersuchungen mehr auf das Gebiet der Algebra und allgemeinen Arithmetik hinübergespielt wurden, mit dem Charakter einer weiter greifenden Allgemeinheit auf, während sie bei den Alten mit andern ganz zufälligen und vereinzelten Kunstgriffen untermischt vorkommen, und nicht wesentlich von denselben unterschieden werden.

Die Alten haben ihre hierhergehörigen Methoden nur auf Geometrie angewandt, und in den Gebieten der allgemeinen Arithmetik und Mechanik keinen Gebrauch von denselben gemacht. Man nennt die Art, wie die Alten die Eigenschaften und Beziehungen der krummlinigt begrenzten Raumgestalten erörterten durch geradlinigt begrenzte Raumgestalten, die als Hülfsfiguren mit denselben in Verbindung gesetzt wurden, und durch Vermehrung ihrer Seiten und Flächen den krummlinigten Gestalten beliebig nahe gebracht werden konnten, im Allgemeinen die Exhaustionsmethode. In diesem allgemeinen Sinne genommen wird unter der Exhaustionsmethode gar Mannichfaches und Heterogenes zusammengefaßt, wovon nur das Wenigste eine nähere Verwandtschaft mit der heutigen Analysis des Unendlichen hat. So z. B. nennt man es einen Beweis nach der Exhaustionsmethode, wenn die Alten aus dem Satze, daß ähnliche geradlinigte ebene Figuren sich ihrem Flächeninhalte nach verhalten wie die zweiten Potenzen ähnlichliegender Seiten, den Beweis herleiteten, daß die Flächen von Kreisen sich verhalten wie die zweiten Potenzen ihrer Radien. Reguläre Vielecke von gleicher Seitenzahl in zwei verschiedenen Kreisen construirt verhalten sich ihrem Flächeninhalte nach wie die Quadrate der von den Kreismittelpunkten auf die Vielecksseiten gezogenen Senkrechten. Durch fortgesetzte Vermehrung der Seitenzahl des Vielecks kann sowol der Flächeninhalt des Vielecks dem des zugehörigen Kreises als auch jene Senkrechte dem Radius des Kreises unbegrenzt angenähert werden. Man muß also schließen, daß die Kreise, als die Grenzen jener in ihrer Seitenzahl

fortwährend wachsenden Vielecke sich ihrem Flächeninhalte nach ebenfalls wie die Quadrate ihrer Radien verhalten. War man auf diese Weise zur Festsetzung des Verhältnisses von Raumgestalten gelangt, so zeigte man noch, daß jede Annahme eines andern Verhältnisses auf einen Widerspruch mit den gemachten Annahmen entweder oder mit sonst bekannten Sätzen führte; und diese Nachweisung, die man die Rückführung aufs Absurde nennt, hielt man erst für den vollgültigen Beweis der Behauptung. Es kann nicht geleugnet werden, daß die Alten durch die bei allen auch den einfachsten Untersuchungen dieser Art feststehende Forderung einer Rückführung auf das Absurde häufig in eine überflüssige pedantische Breite verfallen sind. Erinnert man sich der Art, wie die Alten beweisen, daß der Kubikinhalt eines Kegels der dritte Theil ist von dem Kubikinhalt eines Cylinders, welcher mit dem Kegel gleiche Grundfläche und Höhe hat, oder daß die Fläche einer Ellipse sich zur Fläche eines mit der großen Axe als Durchmesser beschriebenen Kreises verhält wie die kleine Axe zur großen, oder wie der Flächeninhalt eines Kreises durch ein- und umgeschriebene Vielecke annähernd berechnet wurde, so wird man in diesen Verfahrungsweisen keine Analogie mit derjenigen entdecken, durch welche die heutige Analysis des Unendlichen den Flächeninhalt des Kreises, der Ellipse und den Kubikinhalt des Kegels bestimmt. Methoden, welche dieser Letzteren nahe kommen, findet man fast nur bei Archimedes, und auch bei diesem nur in selteneren Fällen. Als Beispiel diene uns die von Archimedes gegebene Berechnung des Kubikinhaltes eines parabolischen Kegels.

Die Linie cad Fig. 91 sei eine gemeine Parabel und cd sei senkrecht auf der Axe ab. Wird die parabolische Fläche um die Axe ab herumgedreht, so beschreibt sie den parabolischen Kegel. Der Kubikinhalt desselben soll verglichen werden mit dem Cylinder, welcher zur Grundfläche den Kreis mit dem Durchmesser cd und zur Höhe die Axe ab hat. Man theile die Axe ab in eine beliebige Anzahl

gleicher Theile, und ziehe durch die Theilungspunkte Parallele mit cd. Durch die Durchschnittspunkte dieser Parallelen und der Parabel ziehe man Linien wie lo, mn, ik und gh parallel mit der Axe ab. Bei der Umdrehung beschreiben die Rechtecke pqlo und pqmn Cylinder und ein parabolisches Flächensegment pqmo beschreibt ein parabolisches Kegelsegment. Der Unterschied eines äußern und innern Rechtecks, wie das Rechteck lmno, beschreibt einen Ring bei der Umdrehung. Der Cylinder trsu und die Summe aller Ringe sind zusammen offenbar dem Cylinder efcd gleich, und geben zugleich den Unterschied an, der stattfindet zwischen der Summe aller äußern und der Summe aller innern Cylinder. Dieser Unterschied, oder der Cylinder fedc kann durch Vermehrung der gleichen Theile der Axe ab beliebig klein gemacht werden. Da nun bei der Parabel die Quadrate der Linien pm und qo sich verhalten wie die Linien ap und aq, und folglich die von den Linien pm und qo als Radien bei der Umdrehung beschriebenen Kreisflächen sich verhalten wie die Linien ap und aq, so werden auch der innere Cylinder mikn und der nächstfolgende innere sich verhalten wie ap zu aq, und ebenso wird der äußere Cylinder lgho zu dem vorhergehenden äußeren Cylinder sich verhalten, wie aq zu ap. Es ergibt sich daraus, daß sowol die äußeren Cylinder für sich vom ersten an gerechnet eine Reihe bilden, deren Glieder sich wie die der natürlichen Zahlenreihe verhalten, als auch die innern Cylinder für sich, sobald man die Axe ab in lauter gleiche Theile theilt. Beide Reihen enthalten dieselben Glieder, nur daß die Reihe der äußeren Cylinder ein Glied mehr hat, nämlich das Letzte. Nun bedient sich Archimedes eines Satzes der allgemeinen Arithmetik, nämlich des Satzes, daß die Summe einer arithmetischen Reihe mehr beträgt als die Hälfte derjenigen Zahl, welche man erhält, wenn man das letzte Glied der Reihe so viel mal nimmt, als die Reihe Glieder hat, und daß die Summe der mit Ausschluß des letzten Gliedes genommenen Reihe we-

niger beträgt als die Hälfte dieser Zahl. Dieser Satz auf unsere Figur übergetragen heißt: Die Summe aller äußern Cylinder beträgt mehr als die Hälfte des Cylinders wvdc, welcher die Linie cd zum Durchmesser seiner Grundfläche, und die Axe ab zur Höhe hat, und die Summe aller innern Cylinder beträgt weniger als die Hälfte dieses selben Cylinders. Da nun durch Verkleinerung der gleichen Theile der Axe ab der Unterschied zwischen der Summe der äußern und der Summe der innern Cylinder beliebig klein gemacht werden kann, so ist die Hälfte des Cylinders wvdc die gemeinschaftliche Grenze, welcher sich die Summe der äußern und die Summe der innern Cylinder ohne Ende nähert. Und da der Cubikinhalt des parabolischen Kegels die gemeinschaftliche Grenze derselben Größen ist, so beträgt dieser Kubikinhalt allgemein die Hälfte desjenigen Cylinders, welcher mit dem parabolischen Kegel gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat.

Diese Kubikinhaltsbestimmung des Archimedes unterscheidet sich von der durch unsere Analysis des Unendlichen zu bewerkstelligenden wesentlich nur dadurch, daß der Kegel zwischen um- und eingeschriebenen Cylindern befaßt wird. Wir würden uns nur der innern bedienen, und wenn wir uns überzeugt hätten, daß die innern Cylinder zunehmen wie die natürliche Zahlenreihe, und daß durch fortgesetzte Verkleinerung der gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen ab die Summe der innern Cylinder dem parabolischen Kegel beliebig nahe gebracht werden kann, so würden wir die Summenformel einer Reihe, deren Glieder beliebig kleine Bruchtheile der Einheit sind, und wie die natürlichen Zahlen zunehmen, bilden, dann zu dem Grenzwerthe dieser Summenformel übergehen, und denselben kurzweg als den Ausdruck des Kubikinhaltes des parabolischen Kegels betrachten. Und da wir wissen, daß man den Grenzwerth der Summenformel der Incrementenreihe der abhängig Veränderlichen erhält, wenn man diejenige Function, welche allgemein ein solches Increment darstellt, integrirt,

so würden wir freilich die Summenformel selbst gar nicht aufstellen, sondern ohne Weiteres integriren. Weil wie bekannt der Differentialquotient des Kubikinhaltes und der Axe hier mit der Grundfläche eines innern Cylinders zusammenfällt, und diese Grundfläche mit einer Zunahme der Axe multiplicirt das Differential des Kubikinhaltes darstellt, so haben wir in dem Differential des Kubikinhaltes noch die innern Cylinder des Archimedes, und in dem Integral die Summe von unzählig vielen verschwindend kleinen innern Cylindern.

Archimedes hat zwar noch mehrere andere Aufgaben durch Summation von Reihen und also durch eine unserer Integralrechnung sehr verwandte Methode aufgelöst. Aber daß er dieser Methode keinen Vorzug vor andern gab, oder wenigstens auf eine möglichst allgemeine Anwendung derselben keinen Werth legte, geht besonders daraus hervor, daß er die Parabel auf zwei von dieser Methode ganz abweichende Weisen quadrirt hat, obgleich es ihm ein Leichtes gewesen wäre, diese Quadrirung auf Summirung einer Reihe zurückzubringen. Denn hätte er durch den Scheitel der Parabel eine auf die Axe Senkrechte gezogen, diese in gleiche Theile getheilt, und auf den Theilungspunkten Senkrechte bis zur Parabel gezogen, so konnte er den auf der convexen Seite der Parabel liegenden Flächeninhalt näherungsweise durch eine Reihe von Rechtecken darstellen, welche sich wie die Quadrate der natürlichen Zahlenreihe verhalten, und die Summe einer solchen Reihe war ihm ganz wohl bekannt.

§. 150.

Das Untheilbare des Cavaleri.

Nachdem man im Laufe des sechszehnten Jahrhunderts sich mit der Mathematik der Alten bekannt gemacht, und ohne die Methoden der alten Lehrmeister zu verlassen einzelnes Neue hinzugefügt hatte, schlug in der ersten Hälfte des siebzehnten Jahrhunderts, zu derselben Zeit, als Car-

tesius durch die Entdeckung der analytischen Geometrie das Gebiet der Mathematik so unermeßlich erweiterte, Cavaleri in der Behandlung einiger geometrischen Probleme einen Weg ein, welcher mit einem Theile unserer Analysis des Unendlichen noch mehr Aehnlichkeit hat als die Exhaustionsmethode. Obgleich die analytische Geometrie, durch welche die Raumgestalten einer arithmetischen Behandlung zugänglich gemacht wurden, und alle bei den Functionen veränderlicher Größen hervortretenden Begriffe veranschaulicht und sinnlich faßbar gemacht werden konnten, indirect als die bei weitem wichtigste Vorstufe der Differential- und Integralrechnung zu betrachten ist, so handelt es sich hier doch nur um Methoden, welche eine directe Beziehung auf diese Rechnung haben.

Cavaleri, der seine sogenannte Methode des Untheilbaren ebenso wie die Alten ihre Exhaustionsmethode nur auf die Geometrie anwandte, hat das Verdienst, denjenigen Theil der Exhaustionsmethode, welcher eine Summirung von Reihen erforderte, als den wichtigsten und als den einer allgemeinen Anwendung allein fähigen erkannt zu haben. Da er aber bemerkte, daß z. B. die innern Cylinder des parabolischen Kegels in der vorhergehenden Aufgabe, in sofern ihre Summe dem Kegel wahrhaft gleich sein soll, eine unendlich kleine Höhe haben müßten, und von bloßen Flächen nicht zu unterscheiden wären, so betrachtete er die parallelen Schnittflächen eines Körpers als die letzten untheilbaren Elemente des Kubikinhaltes, und sah, daß es nur darauf ankomme, das Gesetz der Vergrößerung oder Verkleinerung dieser Flächen in einer Reihe darzustellen, und in der Summenformel dieser Reihe zum Grenzwerthe überzugehen, um den Ausdruck für den Kubikinhalt eines Körpers zu haben. Und weil die schmalen Rechtecke, aus denen man näherungsweise den Flächeninhalt einer krummlinigten Figur zusammensetzt, offenbar unendlich schmal zu denken und von einer Linie nicht zu unterscheiden sind, in sofern ihre Summe dem Flächeninhalte der krummlinigten

Figur vollkommen gleich sein soll, so betrachtete er Linien als die letzten untheilbaren Elemente der Flächen, und desgleichen Punkte als die untheilbaren Elemente der Linien, und so entstand die Benennung der Methode des Untheilbaren. Sieht man ab von dem Unstatthaften der Ausdrucksweise, so ist klar, daß Cavaleri unter dem Untheilbaren einer Raumgröße im Wesentlichen dasselbe verstand, was man auf dem Standpunkte der Infinitesimalrechnung unter dem Differential dieser Raumgröße versteht, in sofern das Differential als verschwindendes Glied einer unendlichen Incrementenreihe derselben genommen wird.

Wir wollen das Verfahren des Cavaleri durch einige Beispiele erläutern. Soll der Kubikinhalt einer Pyramide, gleichviel ob einer senkrechten oder schiefen, berechnet werden, so zieht man von der Spitze der Pyramide eine Senkrechte auf die Basis oder deren Verlängerung. Die Basis heiße B und diese Senkrechte H. In allen Punkten von H denkt man sich Schnittflächen durch die Pyramide gelegt, welche mit B parallel sind. Diese bilden die unzählig vielen untheilbaren Elemente des Kubikinhaltes der Pyramide. Eine beliebige solche Schnittfläche heiße b. Ihre senkrechte Entfernung von der Spitze der Pyramide heiße h. Alsdann ist

$$b : B = h^2 : H^2$$

$$b = \frac{B}{H^2} . h^2.$$

Hiermit haben wir den allgemeinen Ausdruck eines beliebigen untheilbaren Elementes b des Kubikinhaltes. $\frac{B}{H^2}$ ist ein constanter Factor, und h ist als die Wachsende oder Veränderliche anzusehen. Die Summe aller Elemente b von der Spitze bis zur Basis B werden wir erhalten, wenn wir die Quadrate aller den einzelnen b zugehörigen Werthe von h addiren, und diese Summe mit $\frac{B}{H^2}$ multipliciren. Die einzelnen Werthe von h sind aber nichts als die natürliche Zahlenreihe von 1 bis H, wobei H als eine unend-

lich große Zahl zu betrachten ist. Die Quadrate der natürlichen Zahlenreihe bilden eine arithmetische Reihe der zweiten Ordnung. Werden die natürlichen Zahlen von 1 bis H genommen, so ist in der Reihe der Quadrate derselben das Anfangsglied der Reihe 1, das Anfangsglied der ersten Differenzenreihe 3, das constante Glied der zweiten Differenzenreihe 2, und die Anzahl der Glieder der Reihe H. Folglich ist die Summe dieser Reihe (siehe §. 117)

$$H.1+\frac{H(H-1)}{1.2}.3+\frac{H(H-1)(H-2)}{1.2.3}.2$$

oder nach Potenzen von H geordnet

$$\frac{H^3}{3}+\frac{H^2}{2}+\frac{H}{6}.$$

In sofern unter H eine unendlich große Zahl gedacht wird, sind die niedern Potenzen derselben gegen die dritte unvergleichbar, und als wegfallend gegen dieselbe zu betrachten. Man hat also $\frac{H^3}{3}$ als die Summe der Quadrate der natürlichen Zahlenreihe bis zur Zahl H zu nehmen, und indem man dieselbe mit dem constanten Factor $\frac{B}{H^2}$ multiplicirt, erhält man als den Kubikinhalt der Pyramide $\frac{1}{3}$ B. H. Da diese Methode sogleich erkennen ließ, daß die Elemente des Kubikinhaltes dieselben sind für Pyramiden von beliebiger Seitenzahl und für Kegel, und für senkrechte nicht minder als für schiefe, so unterschied sich diese Methode in Bezug auf Kürze sehr zu ihrem Vortheil von dem Verfahren der Alten, welches nur durch viele Zwischensätze und Vermittelungen zu einem so allgemeinen Resultate führen konnte.

Um auch ein Beispiel zu geben, wie Cavaleri vermittelst seiner Methode des Untheilbaren eine Vergleichung anstellte zwischen Raumgestalten, die einige Bestandtheile gemeinschaftlich haben, was die gewöhnliche Manier der Alten war, so wählen wir seine Berechnung des Kubik-

inhaltes der Kugel. Sei adb Fig. 92 ein Halbkreis, der Punkt c sein Mittelpunkt, afeb ein umschriebenes Rechteck, und die Linie cd senkrecht auf fe. Läßt man das Quadrat cafd, den Quadranten cad und das Dreieck cfd um die Linie cd als Axe eine ganze Umdrehung machen, so beschreibt das Quadrat einen Cylinder, der Quadrant eine Halbkugel, und das Dreieck einen Kegel. Zieht man eine beliebige mit ac parallele Linie mnop, so wird der von der Linie po bei der Umdrehung beschriebene Kreis ein Element des Kegels, der von pn beschriebene ein Element der Halbkugel, und der von pm beschriebene ein Element des Cylinders sein. Von welcher Stelle der Linie af man auch die Parallele mp zieht, so werden immer die drei durch das Quadrat, den Kreis und das Dreieck gebildeten Stücke mp, np und op derselben die drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks darstellen, weil in allen Lagen mp gleich dem Radius cn, und op gleich cp ist. Da nun also in allen Lagen $mp^2 = np^2 + op^2$, und die von den Linien mp, np und op bei der Umdrehung beschriebenen Kreise sich wie die Quadrate dieser Linien verhalten, so sieht man, daß an jeder beliebigen Stelle der Linie af das Element des Cylinders gleich ist der Summe der Elemente der Halbkugel und des Kegels, und daß folglich auch der Cylinder selbst gleich ist der Kugel und dem Kegel zusammengenommen. Da nun bekanntlich der Kegel den dritten Theil des Cylinders beträgt, so beträgt die Halbkugel $\frac{2}{3}$ von dem Cylinder.

Die Methode des Cavaleri kam bald in großes Ansehen bei den Zeitgenossen desselben, und die großen Mathematiker jener Zeit, besonders Pascal und Roberval, haben mittelst derselben einen Theil der tiefsinnigen Resultate gewonnen, durch welche sie sich so weit über die Geometrie der Alten erhoben. An der Vorstellung des Untheilbaren nahmen sie keinen Anstoß, weil sie in der That das untheilbare Element einer Fläche nicht geradezu als Linie,

sondern in demselben Sinne als Fläche betrachteten, in welchem die Infinitesimalrechnung das Differential der Fläche als eine unendlich kleine Fläche betrachtet. Man sieht dies aus einem Ausspruch des Pascal, der in dieser Beziehung Folgendes sagt: „Die Methode des Untheilbaren und die der Alten unterscheiden sich nur in der Art des Ausdruckes, was vernünftigen Leuten nicht auffallen wird, wenn man ihnen bemerklich gemacht hat, was man darunter versteht. Deswegen werde ich in der Folge keine Schwierigkeit machen, mich der Sprache des Untheilbaren, „die Summe der Linien oder die Summe der Ebenen," zu bedienen. Ebenso werde ich unbedenklich den Ausdruck, die Summe der Ordinaten, gebrauchen, was denen nicht geometrisch zu sein scheint, welche die Lehre von dem Untheilbaren nicht verstehen, und welche sich einbilden, daß eine Ebene durch eine unbegrenzte Anzahl von Linien ausdrücken eine Sünde gegen die Geometrie sei. Dies kommt aber nur von ihrem Mangel an Einsicht, weil man nichts weiter darunter versteht, als die Summe einer unbegrenzten Anzahl von Rechtecken, gebildet von einer jeden Ordinate, und einem jeden der kleinen gleichen Theile des Durchmessers (Abscisse), deren Summe ohne Zweifel eine Fläche ist. Wenn man demnach spricht von der Summe einer unbegrenzten Menge von Linien, so hat man dabei immer eine gewisse Gerade im Auge, mit deren gleichen und unbegrenzten Theilen diese Linien multiplicirt sind."

Hieraus erklärt es sich, warum Leibnitz bei der Einführung der Differential- und Integralrechnung die Vorstellung des Unendlichkleinen und des in demselben Sinne genommenen Differentials so wenig ausführlich zu rechtfertigen für nöthig hielt. Er fand nämlich diese Vorstellung als eine gebräuchliche und zugestandene unter seinen Zeitgenossen vor, und dieselbe war gerade das am wenigsten Neue bei der ganzen Sache. Erst später, als der Begriff des Differentials und eines verschwindenden Gliedes einer unendlichen Incrementenreihe eine so unermeßliche Ausdehnung gewann, und nicht auf einige geometrische Probleme

beschränkt blieb, als die Differential- und Integralrechnung die ganze höhere Mathematik in sich zu absorbiren anfing, und Alle, welche dieselbe nicht gehörig zu handhaben verstanden, sich bei Seite geschoben sahen, da erst erhoben sich die Einwürfe und der Widerspruch gegen das Unendlichkleine, und veranlaßten den Leibnitz zu mehreren Versuchen einer genaueren Rechtfertigung dieses Begriffs.

Man wird übrigens leicht bemerken, daß mit der Vorstellung des Cavaleri von untheilbaren Raumelementen an sich noch keineswegs ein deutlicher Begriff des Differentials einer Fläche oder eines Körperraumes gegeben war. Cavaleri wandte sein Princip nur an auf solche Fälle, in welchen der Differentialquotient einer Fläche oder eines Körperraumes nur von der Größe einer Linie oder einer Ebene abhing. Hätte er aber z. B. den Flächeninhalt einer Kugelzone berechnen wollen, und die Peripherieen der unzählig vielen parallelen Schnitte, welche durch die Zone gelegt werden können, als die untheilbaren Elemente der Fläche der Kugelzone betrachtet, was nach seinen allgemeinen Principien eigentlich erlaubt gewesen wäre, so hätte er durch Summirung derselben ein falsches Resultat erhalten, weil das Differential dieser Fläche nicht blos von der veränderlichen Größe der Peripherieen der Schnittflächen, sondern auch von der veränderlichen Neigung der Tangente, gewissermaßen von einer veränderlichen Breite der Linien abhängt. Es ist also damit, daß man Linien für die untheilbaren Elemente der Flächen ausgibt, und dabei blos eine veränderliche Länge der Linien im Auge hat, in der That Nichts gesagt. Erst die genaue Aufmerksamkeit auf die Stärke des Wachsens, und auf die dadurch bestimmte Beschaffenheit der unendlichkleinen Incremente der abhängig Veränderlichen kann mit Sicherheit zur directen Bestimmung des Differentials einer ihrer Functionen nach unbekannten abhängig Veränderlichen führen. Die Principien des Cavaleri, sowie er sie gibt, machen große Vorsicht in der Anwendung nöthig, oder sie entbehren genau genommen jeder

näheren Bestimmung ihres richtigen Gebrauchs, und können ebenso gut auf falsche als auf richtige Resultate führen.

Uebrigens ist die Methode des Cavaleri als eine auf einem kleinen und beschränkten geometrischen Gebiete ausgeführte wirkliche Integration zu betrachten, weil er in der Summenformel einer solchen Incrementenreihe, die sich bei Vermehrung ihrer Gliederanzahl der zu bestimmenden Größe unbegrenzt annähert, zum Grenzwerth dieser Summenformel überging. Nur konnte man mit dieser Methode auch auf dem geometrischen Gebiete nicht weit kommen, weil man aller analytischen Differentialgleichungen entbehrte, und die Summenformeln der gesetzmäßigen Reihen wirklich auffinden mußte, was bekanntlich nur in sehr wenigen Fällen gelingt. Der Forschungsgeist der Mathematiker wurde dadurch vorzugsweise auf die Summirung der Reihen gelenkt, und nachdem Wallis durch Induction die Regeln gefunden hatte, durch welche man die Summe einer Reihe, deren Glieder eine gebrochene Potenz der natürlichen Zahlenreihe enthalten, bestimmen kann, so war man in Stand gesetzt, alle diejenigen Aufgaben zu lösen, welche auf dem Standpunkte der Differential- und Integralrechnung durch Integration der einfachen Function $x^{\frac{m}{n}}$ gelöst werden.

§. 151.

Die Theorie des Maximums und Minimums von Fermat.

Die bisher erwähnten Methoden haben einige Aehnlichkeit mit der Integralrechnung, und sind als unvollkommene Vorläufer derselben zu betrachten. Aber es wurden auch vor der Einführung der Differential- und Integralrechnung einige Probleme auf eine Art behandelt, welche nähere Beziehung zur Differentialrechnung haben, indem man die durch eine Zunahme der willkürlich Veränderlichen einer Function entstehende Zunahme der Function ins Auge faßte, und durch Annullirung der Zunahme der willkürlich Veränderlichen zu dem Grenzwerthe des Quotienten der Zunahmen überging. Nur drückte man das Verfahren nicht gerade in dieser Form aus, stellte es

auch nicht als eine allgemeine und wesentliche von speciellen Aufgaben unabhängige Operation dar, sondern ließ es in die Lösung bestimmter Aufgaben verflochten auftreten. Hierher gehört vor allen Dingen die Methode des Fermat zur Auffindung der Maxima und Minima, deren allgemeinere über dieses bestimmte Problem hinausgreifende Bedeutung dem Erfinder nicht vollkommen unbekannt war, da er mehrere andere Aufgaben ebenfalls darauf zurückzuführen suchte.

Die Regel des Fermat zur Bestimmung derjenigen Werthe der willkürlich Veränderlichen einer Function, bei welchen ein größter oder kleinster Functionswerth stattfindet, ist folgende: Man setze in einer Function $f(x)$ den Werth $x+e$ statt x, und bilde eine Gleichung, indem man $f(x)=f(x+e)$ setzt. Diese Gleichung, weil sie an sich natürlich nicht richtig ist, und erst durch Annullirung von e richtig werden kann, nennt Fermat eine adaequalitas. In derselben werden die gleichen Glieder zu beiden Seiten ausgestrichen, dann wird die ganze Gleichung durch e dividirt, und zuletzt werden alle Glieder der Gleichung, welche den Factor e enthalten, getilgt. Wird die nun übrig bleibende Gleichung aufgelöst in Bezug auf x als Unbekannte, so erhält man denjenigen Werth von x, bei welchem ein Maximum oder Minimum stattfindet.

Als Beispiel diene eine Aufgabe, welche Fermat selbst behandelt, nämlich den Werth von x zu suchen, bei welchem die Function $x^2(a-x)$ einen größten Werth hat. Es wird zunächst die Gleichung aufgestellt

$$x^2(a-x)=(x+e)^2[a-(x+e)].$$

Nach Ausführung der vorgeschriebenen Operationen, und Tilgung der gleichen Glieder auf beiden Seiten der Gleichung bleibt übrig

$$0=-3ex^2+2aex-3e^2x+ae^2-e^3.$$

Wird die ganze Gleichung durch e dividirt, und dann e annullirt, so erhält man $3x^2=2ax$

$$x=\frac{2}{3}a.$$

Dies Verfahren scheint von dem der Differentialrechnung sehr verschieden zu sein, ist es in der That aber eigentlich nicht. Der Unterschied besteht nur darin, daß die Differentialrechnung erst den Grenzwerth des Differenzquotienten der Function darstellt, und dann denselben gleich Null setzt, während Fermat in einer unvollkommenen Gleichung die Differenz, oder was hier einerlei ist, den Differenzquotienten gleich Null setzt, und dann durch Annullirung der Zunahme der willkürlich Veränderlichen zum Grenzwerthe oder zum Differentialquotienten übergeht. Denn indem Fermat $f(x) = f(x+e)$ setzt, thut er weiter nichts, als daß er $f(x+e) - f(x) = 0$ oder $\frac{f(x+e) - f(x)}{e} = 0$ setzt. Nachdem er in der Gleichung $f(x) = f(x+e)$ auf beiden Seiten die gleichen Glieder getilgt hat, bleibt ihm, da $f(x)$ in der Entwickelung von $f(x+e)$ vorkommt, der Werth von $f(x+e) - f(x)$ übrig, und zwar ist derselbe gleich Null gesetzt; und indem er ferner die Gleichung $0 = f(x+e) - f(x)$ durch e dividirt, erhält er den Differenzquotienten gleich Null, und endlich durch Annullirung der Zunahme e den Differentialquotienten gleich Null, und damit erst die richtige der Aufgabe entsprechende Gleichung, von welcher die Differentialrechnung gleich ausgeht.

Hätte Fermat sich die Mühe gegeben, die Richtigkeit seiner Theorie recht überzeugend und einleuchtend darzuthun, so wären die Vorstellungen des Differenzquotienten und des Differentialquotienten, welche seinen Schlüssen offenbar zu Grunde liegen, bestimmter hervorgetreten, und er hätte sie auch bei andern Untersuchungen bequemer gebrauchen können. Aber Fermat hatte bei außerordentlich großer Erfindungskraft wenig Lehrhaftes. Er begnügt sich in der Regel, die Resultate seiner tiefsinnigen Combinationen mitzutheilen, ohne recht deutlich in die Genesis seiner Gedanken blicken zu lassen. An vielen Stellen ist er sehr dunkel und fast unverständlich, und wie es scheint nicht blos zum Nachtheil seiner Leser, sondern auch zu seinem eigenen.

Fermat hat die Aufgabe, eine Tangente an einem gegebenen Curvenpunkte zu ziehen, auf eine ähnliche Art, nämlich durch Aufstellung einer unvollkommenen Gleichung, welche durch Annullirung der Zunahme einer Veränderlichen in eine richtige Gleichung übergeführt wird, aufgelöst. Wir wollen sein Verfahren an dem Beispiel einer bestimmten krummen Linie nachweisen. Die Linie adn Fig. 93 sei die gemeine Parabel, und gd eine Tangente. Die dem Berührungspunkte zugehörige Abscisse ab heiße x, und die Subtangente gb heiße s. Man sucht eine Gleichung zwischen x und s. Die Zunahme bc der Abscisse heiße e. Je kleiner e gesetzt wird, desto näher fällt die Ordinate cn der Curve mit der Ordinate cm der Tangente zusammen. Nun ist vermöge der Gleichung der Parabel $\frac{bd^2}{cn^2}=\frac{x}{x+e}$, und bei jeder Tangente $\frac{bd}{cm}=\frac{s}{s+e}$ oder $\frac{bd^2}{cm^2}=\frac{s^2}{(s+e)^2}$. Je kleiner e genommen wird, desto mehr nähern sich die Werthe $\frac{bd^2}{cn^2}$ und $\frac{bd^2}{cm^2}$ und folglich auch die Werthe $\frac{x}{x+e}$ und $\frac{s^2}{(s+e)^2}$ der Gleichheit. Bildet man also die Gleichung

$$\frac{x}{x+e}=\frac{s^2}{(s+e)^2}$$

oder $x(s+e)^2=s^2(x+e)$,

welche durch Ausführung der Operationen und Tilgung der gleichen Glieder und Factoren übergeht in die Gleichung

$$2xs+xe=s^2$$

so nähert sich dieselbe der wahren zwischen x und s stattfindenden Gleichung um so mehr, je kleiner e genommen wird. Folglich ist $2x=s$ diese wahre Gleichung.

Man wird bemerken, daß Fermat hierbei nicht die der Zunahme e zugehörige Zunahme der Ordinate der Curve benutzt, sondern die wachsende Ordinate der Tangente in seine Rechnung aufnimmt. Da nun Fermat seine Theorie des Maximums und Minimums und seine Methode Tan-

genten zu ziehen als zusammengehörig und wesentlich als dasselbe Verfahren betrachtet, so sieht man, daß ihm nicht sowol die Bildung des Differenzquotienten der abhängig und willkürlich Veränderlichen einer gegebenen Function als die Aufstellung einer sogenannten adaequalitas, welche durch Annullirung einer veränderlichen Zunahme in eine wirkliche Gleichung übergeht, als das Wesentliche seines Verfahrens erschienen ist. Wenn nichts desto weniger einige große französische Mathematiker, deren Urtheil man sonst nicht gern entgegentritt, den Fermat gerade dieser eben erwähnten Methoden wegen für den ersten Erfinder der Differentialrechnung ausgeben, so muß man doch wol die Meinung fassen, daß die Vorliebe für die eigene Nation an diesem Urtheil mehr Antheil hat als die unbefangene Prüfung und Erwägung der wahren Sachlage. Der eigene Ruhmesglanz der französischen Nation ist auf dem Gebiete der Mathematik so groß, daß das Bestreben, denselben durch ein falsches und erborgtes Licht zu erhöhen, verwunderlich erscheinen muß.

Kurz vor der Bekanntmachung der Differentialrechnung hat Barrow ein Verfahren, eine Tangente zu ziehen, angegeben, welches auf die Berechnung des Differenzquotienten der Coordinaten der Curve, und des Grenzwerthes desselben basirt ist, und also im Wesentlichen mit dem Verfahren der Differentialrechnung zusammenfällt. Er suchte ebenfalls, wenn td Fig. 94 eine Tangente der beliebigen Curve ade ist, die Subtangente tb durch die Abscisse des Berührungspunktes auszudrücken. Er setzte eine Zunahme bf der Abscisse, und legte durch die Punkte d und e eine Secante. Die Linie sb ist die Subsecante. Vermittelst der die Ordinate ausdrückenden Function der Abscisse wurde die der Zunahme dg der Abscisse zugehörige Zunahme der Ordinate ge berechnet. Wenn nun y die Ordinate des Berührungspunktes darstellt, so ist $\frac{y}{\text{subsc}} = \frac{eg}{dg}$ und

$\text{subsc} = \frac{y}{\frac{eg}{dg}}$. Je kleiner die Zunahme dg der Abscisse genommen wird, desto mehr nähert sich die Subsecante sb der Subtangente tb. Da sich aber zeigte, daß der Quotient $\frac{eg}{dg}$, in sofern er für eine bestimmte Function entwickelt ist, bei Annullirung von dg nicht in den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$, sondern in eine bestimmte Function als in seinen Grenzwerth überging, so ergab sich, daß die Subtangente gleich sei der Ordinate, dividirt durch den Grenzwerth des Differenzquotienten der Coordinaten, und man erhielt dieselbe also ausgedrückt durch eine Function der Abscisse, und damit war für dieses einzelne Problem der Tangenten der Differentialquotient eingeführt.

§. 152.

Die Differentialrechnung und die Fluxionsrechnung.

Alle mathematischen Errungenschaften jener erfindungsreichen und geistig begabten Zeit drängten nach Einem Ziele, und die großartige Zusammenfassung dieser vereinzelten Kenntnisse, in welcher allen ihre rechte Stellung und ihre wahre Bedeutung gegeben wurde, welche eine unermeßliche Erweiterung des Gebrauchs und der Anwendung derselben möglich machte, und welche unter den Händen ihres Erfinders und seiner ersten Anhänger wahre Wunder hervorbrachte, war die Differential- und Integralrechnung. Die Untersuchungen über den Zusammenhang und die gegenseitige Abhängigkeit der Größen, welche ein stetig wechselndes Verhältniß ihrer Zunahmen haben, hatten die Nothwendigkeit herausgestellt, auf das Unendlichkleine zurückzugehen, und zwar bei einer endlosen Verkleinerung der Zunahmen theils ihr Verhältniß noch festzuhalten und zu bestimmen, theils sie als Glieder einer unendlichen Reihe zu einer endlichen Summe zusammenzufassen, oder hatten all-

gemein die Aufgabe hervortreten lassen, das Unendlichkleine, wie man sagt, berechnungsfähig zu machen. Dies war nun allerdings gelungen, und zwar nicht blos in den bisher erwähnten Fällen, in welchen die Auflösung eines umfassenden Problems angestrebt wurde, sondern auch in unzählig vielen ganz vereinzelten Aufgaben. Die Schriften der Mathematiker jener Zeit sind angefüllt mit Untersuchungen der Art. Aber das berechnungsfähige Unendlichkleine war in zwei Arten hervorgetreten, die noch ohne alle gegenseitige Beziehung auf einander erschienen, einmal als die Grenze des Verhältnisses der ins Unendliche verkleinerten Zunahmen zweier von einander abhängigen Veränderlichen, und zweitens als ein verschwindendes Glied einer zu summirenden unendlichen Incrementenreihe. Und die Anwendung beider Principien war sehr beschränkt, weil man dabei auf große arithmetische Hindernisse stieß. Die Berechnung der Differenz oder des Differenzquotienten einer gegebenen Function zeigte sich bei der Mehrzahl der Functionen mit ebenso unübersteiglichen Schwierigkeiten verbunden als die Summirung einer Reihe, deren Glieder ein gegebenes Gesetz des Fortschrittes haben. Um diese Principien wahrhaft nützlich und anwendbar zu machen, dazu bedurfte es erstens einfacher Regeln, die Grenze des Differenzquotienten einer gegebenen Function zu finden, zweitens sicherer Mittel, den wahren Ausdruck eines verschwindenden Incrementes einer ihrer Function nach unbekannten abhängig Veränderlichen zu finden (directe Differentialbestimmung) und einer bestimmten Methode, aus derjenigen Function der willkürlich Veränderlichen, welche ein verschwindendes Increment der abhängig Veränderlichen ausdrückt, die Function der abhängig Veränderlichen selbst zu finden. Alles dies leistete die Differential- und Integralrechnung. Leibnitz gelangte dazu dadurch, daß er das allen den vereinzelten Problemen zu Grunde liegende Allgemeine mit philosophischem Geiste erkannte, dieses in der Bestimmung des Grenzwerthes des Differenzquotienten fand, und nun sich über alle speciellen

Probleme von Maximis und Minimis, von Tangenten, von Quadraturen und Kubirungen erhebend, die Untersuchung auf das Gebiet des wahrhaft Allgemeinen, d. h. des Arithmetischen, hinüberführte mit alleiniger Beibehaltung des Begriffs eines allgemein und abstract gedachten Continuums. Und indem er so die rein arithmetische Aufgabe der Differenzirung für sich ins Auge faßte, erkannte er bald, daß die auf den ersten Blick unermeßlich erscheinende Aufgabe der Differenzirung aller denkbaren Functionen durch eine planvolle Theilung der Arbeit sehr einfach und leicht umfaßbar gemacht werden könne, weil außer den Differentiationsregeln einer sehr geringen Anzahl von Fundamentalfunctionen nur die Differentiationsregeln der möglichen Arten der Zusammensetzung dieser Functionen, wie z. B. eines Products oder Quotienten von Functionen, oder einer Function einer Function und dergl. mehr aufgefunden zu werden brauchen, um alle beliebige Functionen bequem differentiiren zu können. So entstand die operative Differentialrechnung, und damit der uneingeschränkte durch keine besondere Natur der Functionen gehinderte Gebrauch des Grenzverhältnisses der Zunahmen. Durch die operative Differentialrechnung erhielt man in den analytischen Differentialgleichungen den Zusammenhang von ursprünglichen und durch Differentiation abgeleiteten Functionen. Und da man sah, daß der Ausdruck eines verschwindenden Incrementes einer abhängig Veränderlichen nichts Anderes sein kann als das Differential derjenigen Function der willkürlich Veränderlichen, welche die abhängig Veränderliche ausdrückt, so brauchte man nur aus den analytischen Differentialgleichungen diejenige Function, welche einem gegebenen Differential zugehörig war, zu entnehmen, um auf diese Weise ohne Mühe die Grenzwerthe der Summenformeln unzählig vieler Reihen zu haben, deren wirkliche Summirung auch durch die größte, Jahrhunderte lange Anstrengung nicht gelungen wäre.

Neun Jahre nach der Entdeckung der Differentialrechnung, im Jahre 1684, theilte Leibnitz in den zu Leipzig erscheinenden

„Actis Eruditorum“ die Grundzüge der Differentialrechnung mit in der Abhandlung: „Nova methodus pro Maximis et Minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus“, und zwei Jahre später in der Abhandlung „De Geometria recondita et Analysi indivisibilium atque infinitorum“, in welcher zuerst das Integralzeichen vorkommt, und eine Gleichung wie $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2$ eine aequatio summatrix genannt wird, führt er den Grundgedanken der Integralrechnung aus, und somit waren die beiden Grundsteine gelegt zu dem Gebäude, dessen Plan und Ausführung heute und in alle Zukunft des Menschengeschlechts mit Erstaunen und Bewunderung einen Jeden erfüllen muß, der mit hellem für des Geistes edle Form empfänglichem Auge zuerst in dasselbe eintritt.

Aber der Ruhm, sich zum Brennpunkte aller geistigen Strahlen jenes auf dem mathematischen Gebiete so erfindungsreichen Zeitalters gemacht zu haben, ist zu groß, als daß ihn ein Sterblicher unverkümmert besitzen dürfte. Leibnitz mußte diesen Ruhm mit einem andern ihm ebenbürtigen Geiste, mit Newton, theilen. Wir sind zwar keineswegs der Meinung, daß die von diesen beiden Männern gegebene Auffassung und Darstellung dieser Wissenschaft von durchaus gleichem Werthe und Range ist, oder daß auf dem von Newton eingeschlagenen Wege die Wissenschaft ebenso gedeihliche Fortschritte machen und eine ebenso schnelle Ausbreitung hätte gewinnen können, vielmehr sind wir überzeugt, daß, wenn Newton der alleinige Entdecker gewesen wäre, die Wissenschaft früher oder später dennoch gänzlich in die Leibnitzische Auffassung hätte übergehen müssen, und daß der Newton'schen Auffassung gegenüber die Leibnitzische als ein großer Fortschritt erschienen wäre, aber dennoch ist der große Grundgedanke, durch welchen alle die vereinzelten und zerstreuten Bestrebungen der Mathematiker jener Zeit in ein Ganzes zusammengefaßt wurden, und der

die reife Frucht jener Zeit war, in beiden Männern ursprünglich und ohne gegenseitigen Einfluß entstanden.


Wir wollen hier keine Erklärung der Newton'schen sogenannten Fluxionsrechnung geben, sondern nur ihren Grundcharakter mit der Leibnitzischen Differentialrechnung vergleichen. Bei Newton erscheint das, worauf es allein wesentlich ankommt, nämlich die Bestimmung der Stärke des Wachsens, sei es einer gegebenen Function oder einer ihrer Function nach unbekannten abhängig Veränderlichen, und die Herleitung der Function der abhängig Veränderlichen aus dem gegebenen Differentialquotienten, nicht für sich, sondern angekettet an eine andere eigentlich nicht zur Sache gehörige Vorstellung, nämlich an die Vorstellung der Bewegung. Newton beginnt die Erklärung seiner Grundbegriffe daher nicht mit allgemein gedachten veränderlichen Größen, sondern mit sehr speciellen Größen, nämlich mit Linien, welche durch die Bewegung von Punkten erzeugt werden. Diese Größen dienen nicht etwa nur als Beispiel, sondern als Fundament der Lehre. Man wird aber leicht ermessen, daß die unter dem Bilde von Linien und von Geschwindigkeiten der bewegten Punkte dargestellten Grundbegriffe der Differential- und Integralrechnung dieser bildlichen Umhüllung überall wieder entkleidet werden müssen, sobald von andern wachsenden Größen und nicht von Linien die Rede ist, oder daß diese Bilder im uneigentlichen Verstande genommen werden müssen, wodurch dann die Sache leicht verdunkelt wird. Wenn man schon im Besitz der Differential- und Integralrechnung ist, so ist es dann freilich leicht, bei Aufstellung der Grundlehren der reinen Bewegungslehre aus der Geschwindigkeit, mit welcher man einen die Abscisse einer Curve erzeugenden Punkt fortrückend denkt, die Geschwindigkeit herzuleiten, mit welcher ein Punkt fortrücken müßte, welcher gleichzeitig die zugehörige Ordinate oder die Curve selbst erzeugen sollte, sobald außer der Abscissengeschwindigkeit die Ordinatengleichung der Curve gegeben ist. Wenn man aber umgekehrt aus der Vorstellung

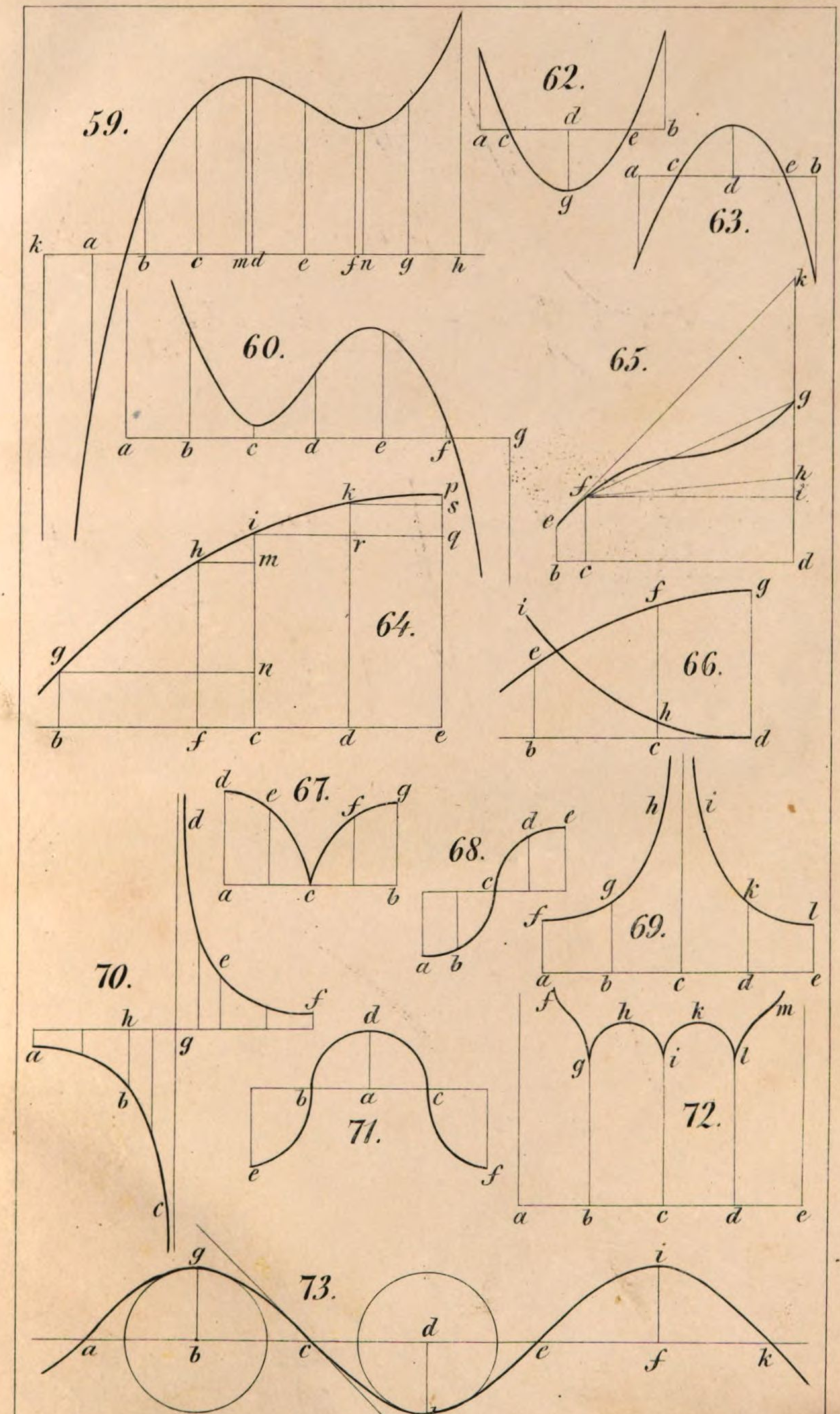
dieser zusammengehörigen Geschwindigkeiten die Grundbegriffe der Differentialrechnung erst entwickeln will, so wird die Sache ohne Noth dunkel und schwierig. Die Geschwindigkeit, mit welcher ein Punkt auf einer Linie fortrückt, ist es ursprünglich, was Newton Fluxion nennt, und diese fällt also mit dem Differentialquotienten von Raum und Zeit zusammen. Indem man die Fluxion der Ordinate durch die der Abscisse dividirt, erhält man den Differentialquotienten der Ordinaten Wenn das Wort Fluxion auf eine andere Raumgröße, z. B. auf Flächen übertragen wird, so bedeutet Fluxion eigentlich keine Geschwindigkeit mehr, wenigstens nicht die Geschwindigkeit der Fortbewegung der die Fläche erzeugenden Linie, sondern die einer gewissen Zeit zugehörige Flächenzunahme, in sofern beide Größen als gleichmäßig wachsend gedacht werden. Soll die Fluxion der Fläche wirklich eine Geschwindigkeit darstellen, so muß man die Flächenzunahmen durch correspondirende Linien ausdrücken, was wieder nur ganz unnöthige Weitläufigkeiten hervorbringt. Newton, wol einsehend, daß bei der Uebertragung der der Bewegungslehre entnommenen Begriffe auf andere Größen die Vorstellung der Zeit ungehörig und vielfach lästig sei, sagt, daß die Zeit nicht im eigentlichen Verstande, sondern formaliter zu nehmen sei. Abgesehen davon, ob bei diesem Unterschiede sich etwas Bestimmtes denken läßt, so ist damit doch so viel gesagt, daß man die veränderlichen Größen nur überhaupt als Functionen einer gleichförmig wachsenden willkürlich Veränderlichen, wie etwa die Zeit ist, zu denken brauche, und den Differentialquotienten dieser beiden Veränderlichen die Fluxion der abhängig Veränderlichen nennen solle. Damit ist aber die Vorstellung der Geschwindigkeit im eigentlichen Sinne auch aufgegeben, und man sieht nicht ein, was diese allen Veränderlichen zu Grunde gelegte gleichförmig Wachsende nun noch nützen soll, da ja die willkürlich Veränderliche einer jeden gegebenen oder unbekannten Function diese Rolle einer gleichförmig Wachsenden übernehmen kann. Durch diese

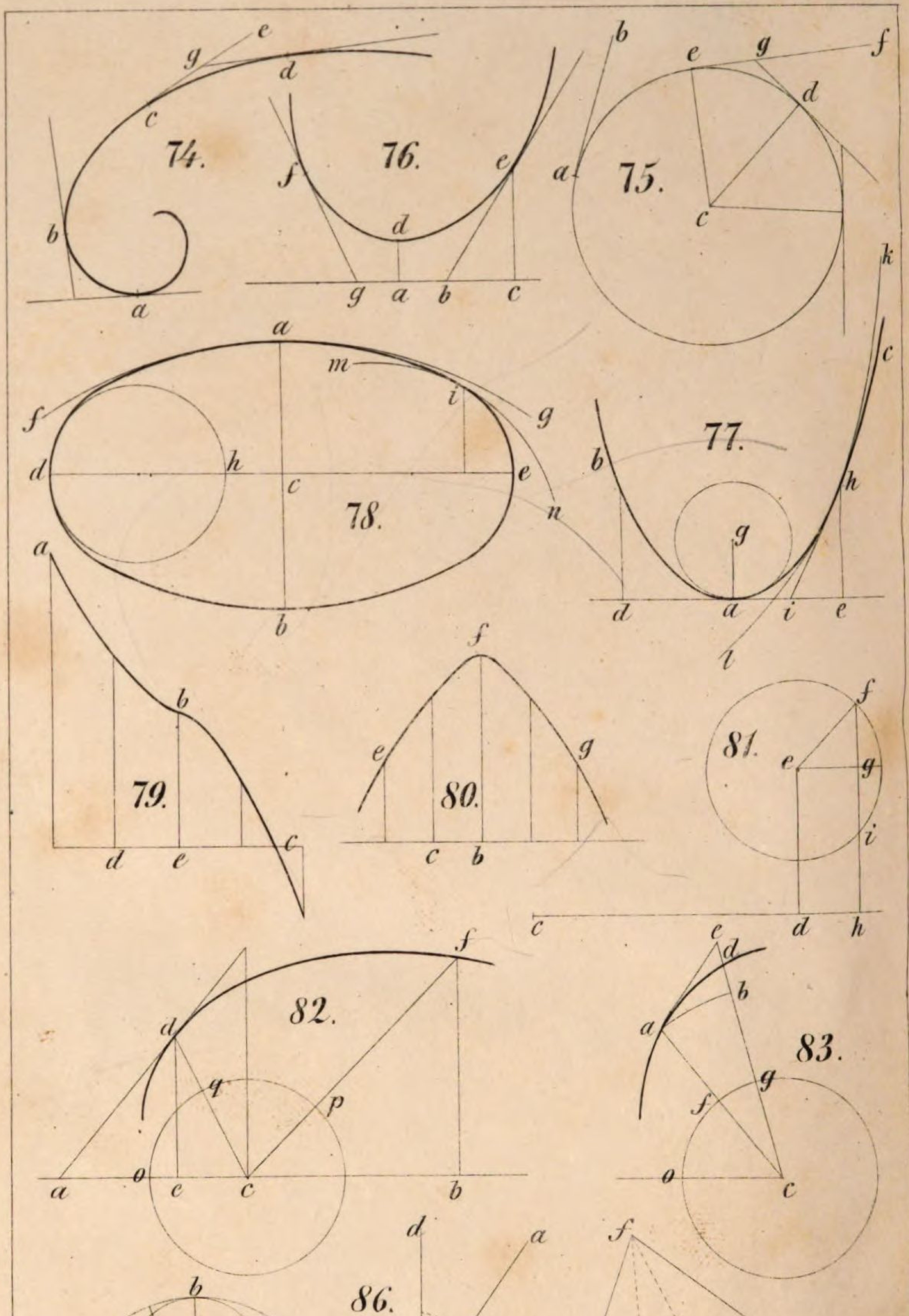
Wendung tritt man aber aus der Newton'schen Auffassung ganz heraus und in die Leibnitzische hinein.

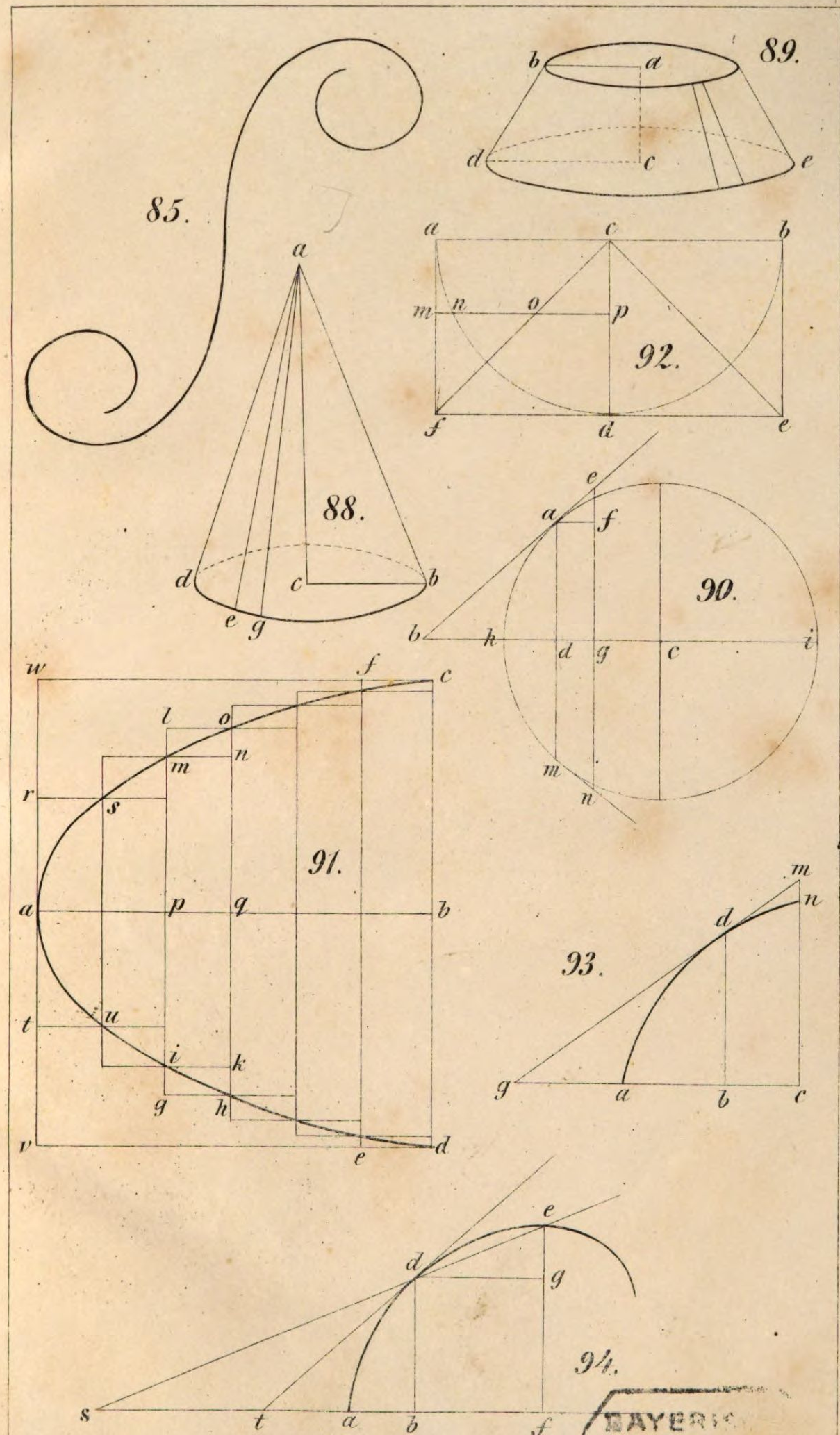
Sicherlich war Newton ursprünglich von phoronomischen Untersuchungen ausgegangen, und hatte dann bemerkt, daß den dabei angewendeten Methoden eine allgemeine über phoronomische Probleme hinausreichende Bedeutung und Anwendung gegeben werden konnte. Da ihm selbst diese Uebertragung der phoronomischen Begriffe auf andere Gebiete geläufig war, und er seine Abhandlungen nicht für die Oeffentlichkeit bestimmt hatte, so unterließ er es, seine Resultate unabhängig von dem zufälligen Ausgangspunkte derselben darzustellen, sonst würde er wol den Weg, auf welchem er seine Resultate gefunden hatte, unterschieden haben von dem Wege, auf welchem sie Andern am besten mitzutheilen sind. Als aber der Prioritätsstreit zwischen ihm und Leibnitz zum Ausbruch gekommen war, wurde er, um die Eigenthümlichkeit seiner ersten Auffassung und das frühere Datum seiner Abhandlungen nachzuweisen, genöthigt, mit dem, was ursprünglich nur fürs Haus bestimmt war, gewissermaßen in dem Schlafrocke in die Oeffentlichkeit herauszutreten. Daß die Engländer einige Zeit lang in diesem Schlafrocke herumstolzirt sind, bis sie des Lächerlichen und Verkehrten und ihres eigenen Schadens inne wurden, gehört zu den bemerkenswerthen Erscheinungen der Nationaleifersucht. Beide Männer Leibnitz und Newton haben die gleiche Ehre einer selbständigen Entdeckung der Differential- und Integralrechnung, aber Leibnitz allein hat ihr eine brauchbare Gestalt gegeben, und diese gerade ist es, der man den Fortschritt der Wissenschaft wesentlich zu danken hat.

Druck von F. A. Brockhaus in Leipzig.


50.
51.
52.
53.
54.
55.
56.
57.
58.
61.


59.
60.
62.
63.
64.
65.
66.
67.
68.
69.
70.
71.
72.
73.


74.
76.
75.
78.
77.
79.
80.
81.
82.
83.
86.
84.
87.


85.
88.
89.
92.
90.
91.
93.
94.

[illegible]

[illegible] 74

Snell, Karl,

Einleitung in die Differential- und Integralrechnung

Bd.: 2

Leipzig 1851